

Государственное областное бюджетное профессиональное  
образовательное учреждение  
«Усманский многопрофильный колледж»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И  
ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики

---

Программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)

по специальности: 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

---

по программе базовой подготовки

---

Усмань 2018


Методические рекомендации по организации и проведению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Организация-разработчик: Государственное областное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Усманский многопрофильный колледж»

Разработчик: Нижегородова О.М., преподаватель математики  
Рассмотрены и утверждены на заседании предметно-цикловой комиссии естественнонаучных дисциплин

Протокол № 6 от 29.06.2018 г.

Председатель предметно-цикловой комиссии естественнонаучных дисциплин \_\_\_\_\_ Коровина Т.В.



УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора Думма Т.А.  
по учебно-методической работе



## Введение

Практические занятия, как вид учебных занятий, направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

В процессе практического занятия обучающиеся выполняют одно или несколько практических заданий в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Содержание практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики должно охватывать весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина, а в совокупности охватывать всю профессиональную деятельность, к которой готовится специалист.

При разработке содержания практических занятий следует учитывать, что наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Выполнение обучающимися практических занятий проводится с целью:

- формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки обучающихся, установленными ФГОС и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики по конкретным разделам и темам дисциплины;

- обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний;

- совершенствования умений применять полученные знания на практике, реализации единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развития интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработки таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива при решении поставленных задач при освоении общих и профессиональных компетенций.

Соответственно в процессе освоения учебной дисциплины ЕН.02 Элементы высшей математики обучающиеся должны овладеть:

умениями:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;

- решать дифференциальные уравнения;

знаниями:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Выше перечисленные умения и знания направлены на формирование следующих профессиональных и общих компетенций студентов:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для

эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Собирать данные для анализа использования и функционирования информационной системы, участвовать в составлении отчетной документации, принимать участие в разработке проектной документации на модификацию информационной системы.

ПК 1.2. Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы.

ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

Данные методические рекомендации по организации и проведению практических работ составлены в соответствии с содержанием рабочей программы дисциплины Элементы высшей математики специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям) по программе углубленной подготовки.

Учебная дисциплина Элементы высшей математики изучается в течение одного семестра. Общий объем времени, отведенный на выполнение практической работы по учебной дисциплине Элементы высшей математики, составляет в соответствии с учебным планом и рабочей программой – 70 часов.

Методические рекомендации призваны помочь студентам правильно организовать работу и рационально использовать свое время при овладении содержанием учебной дисциплины Элементы высшей математики, закреплении теоретических знаний и практических умений.

### **Распределение часов на выполнение практической работы студентов по разделам и темам учебной дисциплины Элементы высшей математики**

Наименование раздела, темы	Количество часов на ПР
<b>Раздел 1. Элементы теории множеств.</b>	<b>4</b>
Тема 1.2 Числовые множества. Практическая работа №1. Решение упражнений с использованием теории множеств.	4
<b>Раздел 2. Элементы линейной алгебры</b>	<b>6</b>
Тема 2.1. Матрицы и определители Практическая работа № 2. Вычисление определителей	2
Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений Практическая работа № 3. Системы, решаемые по методу Крамера	2
Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений	2

Практическая работа № 4. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений	
<b>Раздел 3. Элементы аналитической геометрии.</b>	<b>10</b>
Тема 3.1. Геометрические векторы и действия над ними Практическая работа № 5. Линейные операции с векторами	2
Тема 3.2. Понятия уравнения линии и уравнение поверхности Практическая работа № 6. Задачи на уравнение прямой и плоскости в пространстве	2
Тема 3.2. Понятия уравнения линии и уравнение поверхности Практическая работа № 7. Уравнение окружности, эллипса, гиперболы, параболы	3
Тема 3.2. Понятия уравнения линии и уравнение поверхности Практическая работа № 8. Поверхности второго порядка	3
<b>Раздел 4. Числовые последовательности и их пределы</b>	<b>3</b>
Тема 4.1. Числовые последовательности и их пределы Практическая работа № 9. Предел числовой последовательности	3
<b>Раздел 5. Предел функции одной вещественной переменной</b>	<b>4</b>
Тема 5.1. Предел функции Практическая работа №10. Определение функции. Графики элементарных функций	2
Тема 5.2. Непрерывность функции Практическая работа №11. Предел и непрерывность	2
<b>Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной вещественной переменной</b>	<b>12</b>
Тема 6.1. Производная функции. Основные правила дифференцирования Практическая работа №12. Производная и дифференциал функции	3
Тема 6.2. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Практическая работа №13. Теоремы о дифференцируемых функциях	3
Тема 6.3. Производные и дифференциалы высших порядков Практическая работа №14. Формула Тейлора	3
Тема 6.4. Использование производной при исследовании функции Практическая работа №15. Исследование функций и построение графиков	3
<b>Раздел 7. Интегральное исчисление функции одной вещественной переменной</b>	<b>4</b>
Тема 7.1. Неопределенный интеграл Практическая работа №16. Вычисление неопределенного интеграла	1
Тема 7.2. Определенный интеграл Практическая работа №17. Приложения определенного интеграла	2
Тема 7.3. Несобственные интегралы Практическая работа №18. Вычисление несобственных интегралов	1
<b>Раздел 8. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных</b>	<b>4</b>
Тема 8.1. Функции нескольких переменных. Практическая работа №19. Область определения и непрерывность функции нескольких переменных	1
Тема 8.2. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных Практическая работа №20. Дифференциал функции нескольких переменных	3
<b>Раздел 9. Интегральное исчисление функции нескольких переменных</b>	<b>4</b>
Тема 9.1. Определение двойного интеграла	2

Практическая работа №21. Вычисление двойного интеграла	
Тема 9.2 Приложения двойного интеграла	2
Практическая работа №22. Применение двойных интегралов	
<b>Раздел 10. Основы теории рядов</b>	<b>7</b>
Тема 10.1. Числовые ряды	4
Практическая работа №23. Исследование числовых рядов на сходимость	
Тема 10.2.Функциональные ряды	3
Практическая работа №24. Исследование функциональных рядов на сходимость	
<b>Раздел 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>	<b>12</b>
Тема 11.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия	3
Практическая работа №25. Общее и частное решения дифференциальных уравнений	
Тема 11.2 Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах	3
Практическая работа №26. Решение уравнений первого порядка	
Тема 11.3 Уравнения высших порядков	3
Практическая работа №27. Решение уравнений высших порядков	
Тема 11.4 Линейные уравнения высших порядков	3
Практическая работа №28. Решение линейных уравнений высших порядков	
<b>Всего</b>	<b>70</b>

### Перечень рекомендуемой литературы

#### Основные источники:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А., Сабурова Т.Н. Элементы высшей математики / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 400 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 157 с.

#### Дополнительные источники:

1. Богомолов Н.В. - Практические занятия по математике. – М.: ЮРАЙТ, 2017.

#### Интернет-ресурсы:

1. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов  
<http://school-collection.edu.ru/collection/matematika>
2. Московский центр непрерывного математического образования  
<http://www.mccme.ru>
3. Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа  
<http://www.bymath.net>
4. Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября»  
<http://mat.1september.ru>
5. Задачи по геометрии: информационно-поисковая система <http://zadachi.mccme.ru>
6. Интернет-проект «Задачи» <http://www.problems.ru>
7. Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online)  
<http://www.mathtest.ru>
8. Образовательные платформы ЭБС «Юрайт» и «Знаниум».

## Раздел 1. Элементы теории множеств.

### Тема 1.2 Числовые множества.

### Практическая работа № Решение упражнений с использованием

**Цель:** формирование умений задавать множества указанием характеристического свойства, устанавливать отношения между множествами, изображать их с помощью кругов Эйлера.

#### Требования к знаниям и умениям:

**Знать а) Понятия:** - множество;

- элемент множества;
- характеристическое свойство элементов множества;
- подмножество;
- равные множества;
- пустое множество;
- конечное, бесконечное множество.

**б) Обозначения:** -  $a \in A$ ,  $b \notin A$  (для записи предложений « $a$  принадлежит множеству  $A$ » и « $b$  не принадлежит множеству  $A$ »);

-  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  (для задания множества путем перечисления всех его элементов);

-  $A = \{x / x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$  (для задания множества путем указания характеристического свойства);

-  $A \subset B$  (для записи предложения « $A$  подмножество  $B$ »);

-  $A = B$  (для записи предложения «Множества  $A$  и  $B$  равны»);

- обозначения числовых множеств:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{R}$ .

**Уметь:** задавать множества, выделять подмножества, устанавливать отношения между множествами, изображать их с помощью кругов Эйлера

#### Содержание практической работы

**Задание 1:** Объясните, почему множество  $X = \{2, 4, 6\}$  является подмножеством множества  $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ .

**Задание 2:** Даны два множества:  $A = \{2, 4, 6\}$  и  $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Верно ли, что:

- а) множества  $A$  и  $B$  пересекаются;
- б) множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ ;
- в) множество  $P = \{4, 0, 6, 8, 2\}$  равно множеству  $B$ ?

**Задание 3:** Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами:

- а)  $C$  - множество двузначных чисел,  
 $D = \{3, 43, 34, 56, 103\}$ ;
- б)  $C$  - множество двузначных чисел,  
 $D$  - множество четных натуральных чисел;
- в)  $C$  - множество двузначных чисел,  
 $D$  - множество трехзначных чисел;
- г)  $C$  - множество двузначных чисел,  
 $D$  - множество натуральных чисел, не меньших 10.

**Задание 4:**  $A$  – множество выпуклых четырехугольников,  
 $B$  - множество параллелограммов,  
 $C$  - множество прямоугольников,  
 $D$  - множество ромбов,  
 $E$  - множество квадратов.

Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между множествами:

- а) А и В,
- в) В и С,
- с) С и D,
- д) С, D и F,
- е) А, В, С, D и F.

**Задание 5:** Какое из данных множеств является подмножеством другого:

- а) А- множество натуральных чисел, кратных 3,  
В- множество натуральных чисел, кратных 6,  
С- множество натуральных чисел, кратных 3.
- в) А- множество треугольников,  
В- множество прямоугольных треугольников,  
С- множество остроугольных треугольников.

**Задание 6:** Установите, с какими теоретико-множественными понятиями встречаются учащиеся

- а) запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа;
- б) из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся без остатка на 5;
- в) из чисел 27, 45, 38, 62, 53, 72, 8, 48 выпиши те, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

**Задание 7:** Изобразите отношение между множествами  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$  с помощью кругов Эйлера

**Задание 8:** Известно, что элемент  $a$  содержится в множестве А и в множестве В. Следует ли о

**Задание 9:** Известно, что каждый элемент множества А содержится в множестве В. Следует

**Задание 10:** Дано множество  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ . Образуйте все подмножества, содержащие два элем

## Раздел 2. Элементы линейной алгебры

### Тема 2.1. Матрицы и определители

### Практическая работа № Вычисление определите

**Цель:** получение практических навыков при вычислении определителей второго и третьего порядка  
Теоретические сведения

### ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Пусть дана матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Число  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  называется определителем второго порядка, соответствующим данной матрице

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы А размера 2x2 (определитель 2-го порядка) – это число, которое может быть вычислено по формуле: произведение элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определитель второго порядка содержит две строки и два столбца, числа  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  – это элементы матрицы. Можно представить схематически:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}.$$



Количество строк и столбцов в определителе всегда совпадает. Кроме определителей второго порядка содержит три строки и три столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для вычисления определителя 3-го порядка существует несколько правил.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Для вычисления определителя надо повторить запись первого и второго столбцов. Проведем три левых столбца, первые слагаемые получаются как результат произведения элементов, стоящих на каждой из левых диагоналей. Три последние произведения берутся с противоположным знаком.

*Пример 1.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 7 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \cdot (-2) - \\ - 3 \cdot 0 \cdot (-4) - 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \cdot 7 = -65$$

### ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Перемножаются элементы, стоящие на левых диагоналях. Одна диагональ, *главная*, проходит от верхнего левого угла к нижнему правому. Вторым элементом для нее является элемент, стоящий в вершине треугольника (схема 1). Аналогично для второй и третьей диагоналей. Эти произведения берутся с обратным знаком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

*Пример 2.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot (-4) + 5 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot (-4) - \\ - 4 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 7 = -65$$

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОК

Прежде чем перейти к следующему правилу вычисления определителя, введем понятие минора и алгебраического дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычеркнем одну строку и один столбец, останется определитель второго порядка, который принято обозначать  $M_{ij}$ . Если вычеркнуть строку  $i$  и столбец  $j$ , то получим минор  $M_{ij}$ .

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

При вычеркивании “ $i$ ”-й строки и “ $j$ ”-го столбца получим минор  $M_{ij}$ . Через  $A_{ij}$  обозначим алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма  $i+j$  - четное число, и со знаком «минус», если нечетное.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

По свойствам определителя его можно представить в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

что соответствует разложению определителя по элементам первой строки. Аналогично можно разложить по элементам других строк и столбцов.

*Пример 3.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель разложением по элементам строки. Для определенности выберем первую строку.

Тогда  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{13} = 3$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 8$$

$M_{11}$  – получен вычеркиванием первой строки и первого столбца.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -(35 + 16) = -51$$

$M_{12}$  – получен вычеркиванием первой строки и второго столбца.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-51) + 3 \cdot (-10) = -65$$

Тогда

*Вывод: Вычисление определителей.* Определитель матрицы  $A$  размера  $2 \times 2$  (определитель 2-го порядка)

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали)

Определитель матрицы  $A$  размера  $3 \times 3$  (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу Саррюса:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

вычисления определителей 2-го порядка) формулой

Содержание практической

Вариант 1.

Задание 1. Запишите миноры  $M_{11}, M_{13}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}$  и алгебраические дополнения  $A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Вычислить определители:

1)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix};$

2)  $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix};$

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix};$

5)  $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix};$

6)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7)  $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Справка. Число  $i$  определяется равенством  $i^2 = -1$ . Называется мнимой единицей.

Задание 3. Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

**Задание 4.** Вычислить определитель, разложив его по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

**Задание 5.** Вычислить определитель по правилу треугольника и, разложив его по элементам первого

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}$$

**Задание 6.** Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

**Задание 7.** Вычислить определитель:

## Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений

### Практическая работа № Системы, решаемые по методу

Цели работы:

расширить представление о методах решения СЛУ и отработать алгоритм решения СЛУ методом

развивать логическое мышление студентов, умение находить рациональное решение задачи;

воспитывать у студентов аккуратность и культуру письменной математической речи при оформ

Основной теоретический материал.

Метод Крамера . Применение для систем линейных уравнений.

Задана система N линейных алгебраических уравнений (СЛУ) матрицы  $A(a_{ij})$ , а свободными членами - числа  $b_1, b_2, \dots, b_N$ .

Первый индекс  $i$  возле коэффициентов  $a_{ij}$  указывает в каком уравнении находится коэффициент

Если определитель матрицы  $A$  не равен нулю

то система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Если  $\Delta = 0$ , то такая упорядоченная совокупность  $N$  чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , которая при  $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_N = \lambda_N$  удовлетворяет равенству. Если правые части всех уравнений системы равны нулю, то система является однородной, в противном случае - неоднородной  $b_j \neq 0, (j = 1, 2, \dots, N)$ . Если система линейных уравнений совместна, в противном случае - несовместимой. Если решение системы единственное, то система называется совместной, в противном случае - несовместимой. Если решение системы не единственное, систему уравнений называют неопределенной. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если все решения одной системы являются решениями второй, и наоборот. Эквивалентны (или равносильны) системы уравнений, если они имеют одинаковые решения.

Эквивалентные преобразования СЛАУ

- 1) перестановка местами уравнений;
- 2) умножение (или деление) уравнений на отличное от нуля число;
- 3) добавление к некоторому уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное, отличное от нуля число.

Решение СЛАУ можно найти разными способами, например, по формулам Крамера

Теорема Крамера. Если определитель  $\Delta$  системы  $N$  линейных алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}, \Delta_j (j = 1, 2, \dots, N) - \text{опред. по матрице, полученной из матрицы коэффициентов системы заменой } j\text{-го столбца на столбец свободных членов.}$$

Если  $\Delta = 0$ , а хотя бы один из  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$  отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет. Если же  $\Delta = 0$  и  $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_N = 0$ , то система имеет бесконечно много решений.

Задача 1.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad \text{Решение. Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot (-3) - [(-1) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-3)] = 4 + 8 - 12 + 4 + 16 + 6 = 26.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то заданная система уравнений совместна и имеет единственное решение. Вычислим  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ .

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot (-3) - [(-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-3)] = 6 + 10 + 12 + 5 - 16 + 9 = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot 5 - [(-1) \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5] = 16 + 12 + 20 + 16 + 24 - 10 = 78;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot (-3) - [3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-3)] = 10 + 32 + 36 - 12 + 40 + 24 = 130.$$

По формулам Крамера находим неизвестные  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{130}{26} = 5.$

Итак  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$  единственное решение системы.

Задача 2.

Дана система четырех линейных алгебраических уравнений. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных. Для этого разложим его по первому столбцу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -8 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Найдем составляющие определителя:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-8) \cdot 5 \cdot 3 - [(-8) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 3] = -65;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 3 - [(-8) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3] = -69;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 \cdot 2 - [(-8) \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 2] = 58;$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - [2 \cdot 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 2] = 52.$$

Подставим найденные значения в определитель  $\Delta = -65 + 69 + 58 - 52 = 10$ .

Детерминант  $\Delta = 10 \neq 0$ , следовательно система уравнений совместная и имеет единственное решение

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Разложим каждый из определителей по столбцу в котором есть больше нулей.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 3 \cdot (-25) = 70;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 + 3 \cdot (-29) = -80;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 \cdot (18) = -50;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 3 \cdot 22 = 60.$$

По формулам Крамера находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{70}{10} = 7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{80}{10} = -8, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{50}{10} = -5, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{10} = 6.$$

Решение системы  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5.$

Содержание практической

Решите систему уравнений по формулам Крамера

$$1. \begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

## Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений

### Практическая работа №

#### Однородные и неоднородные системы ли

**Цель работы:** изучение численных методов решения систем линейных алгебраических уравн

**Описание метода Гаусса с выбором главного элемента для решения систем линейных ал**

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из основных задач вычислительн

Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений я (метод последовательного исключения неизвестных) известен в различных вариантах уже более 2000 лет.

Вычисления с помощью метода Гаусса заключаются в последовательном исключении неизве (с помощью последовательного исключения неизвестных) треугольной матрицей. Вычисления значений неизвестных производят на этапе обратного хода.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора).

На 1-м шаге метода среди элементов  $a_{ij}$  определяют максимальный по модулю элемент. По стандартным образом производят исключение неизвестного  $x_{i1}$  из всех уравнений, кроме первого.

Будем называть его главным элементом 1-го шага.

Найдем величины  $q_{i1} = a_{i1}/a_{11}$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), называемые множителями 1-го шага. Вычтем уравнение, умноженное соответственно на  $q_{21}, q_{31}, \dots, q_{n1}$ . Это позволит обратить в нуль коэфф эквивалентную систему

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Матрица  $A$  является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим  $x_n$ . Подставляя найденное значение в предыдущие уравнения, далее последовательно находим  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ .

Вычисление точностной оценки по координатам производится по следующей формуле:

где  $i = 1, \dots, n$ ;  $x_i$  – координаты решения по методу Гаусса;  $x_i^*$  – координаты точного решения.

**Содержание практической**

**Задание 1. Решите систему уравнений**

1. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$	2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$	3. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 2x - y - z = -9 \end{cases}$	5. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9 \\ x + 5y + z = 20 \\ 3x + 4y + 2z = 15 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$	7. $\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4 \\ x + y - z = 2 \\ 4x + y - 3z = -5 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 12 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + y + 2z = 11 \\ 4x + y + 4z = 22 \end{cases}$	10. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 14 \\ 2x + 3y - 4z = -16 \\ 3x - 2y - 5z = -8 \end{cases}$

**Раздел 3. Элементы аналитической геометрии.**

**Тема 3.1. Геометрические векторы и действия над ними**

**Практическая работа №**

**Линейные операции с векторами**

**Цель:** овладеть навыками использования правил действий над векторами в векторной и координатной формах.

**Теоретическая часть**

Любой направленный отрезок прямой называется вектором.

Вектор, заданный парой несовпадающих точек  $A$  и  $B$ , обозначается  $\vec{AB}$ , причем в этой записи  $A$ -начало, а  $B$ -конец вектора.

Векторы могут быть записаны с помощью строчных букв:  $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}; \vec{d}$  ...

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Например,  $\vec{AA}$  или  $\vec{0}$  является нулевым вектором.

Длиной вектора называется длина порождающего его отрезка, обозначается,  $|\vec{AB}|, |\vec{a}|$ , говорят «модуль вектора».

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

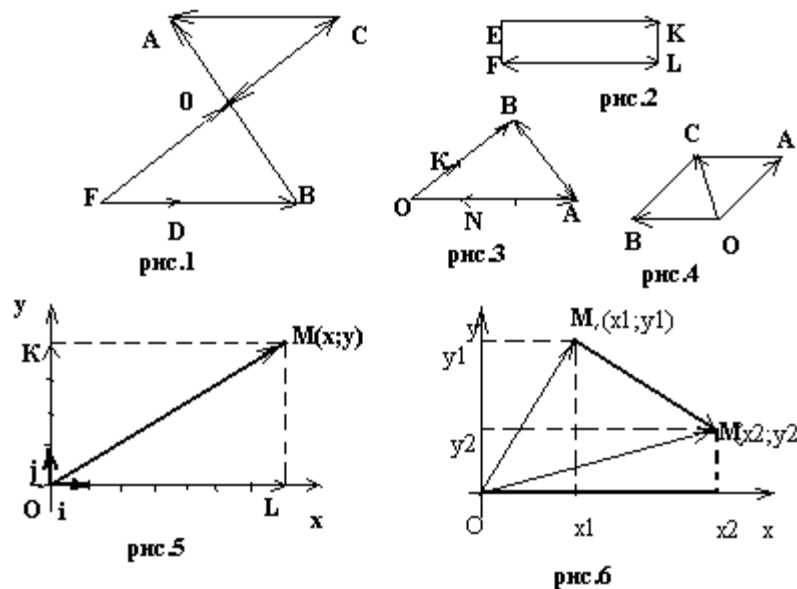
Так, на рис.1 коллинеарными являются следующие векторы:  $\vec{FD}$  и  $\vec{FB}$ ;  $\vec{CA}$  и  $\vec{DB}$ ;  $\vec{FO}$  и  $\vec{CO}$ . Среди коллинеарных векторов различают сонаправленные и противоположно направленные.



называются сонаправленными и пишут  $\overrightarrow{FO} \uparrow \uparrow \overrightarrow{OC}$  (см. рис.1).

Если направления векторов противоположно направлены, то их и называют противоположно направ...

Два коллинеарных вектора называют равными, если они сонаправлены и имеют равные длины; други...



### Действия над векторами

1. Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\vec{a}$ , а конец перенесено в конец вектора  $\vec{b}$  (правило треугольника). На рис.3  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$  или  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ .

Свойства суммы векторов:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (переместительное свойство)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (сочетательное свойство)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

2. Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют сумму вектора  $\vec{a}$  и  $-\vec{b}$ , т.е.  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Векторы  $\vec{b}$  и  $-\vec{b}$  наз...

3. Произведением вектора  $\vec{a}$  на вещественное число  $k$  называется вектор  $k\vec{a}$ , который  $k > 0$ , то  $\vec{a} \uparrow \uparrow k\vec{a}$ , если  $k < 0$ , то  $\vec{a} \uparrow \downarrow k\vec{a}$ .

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{OA}$$

На рис.3

### Декартова система координат

Если задана прямоугольная система координат XOY, на осях OX и OY взяты единичные векторы  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  (рис.5). Докажите самостоятельно.

Числа  $x$  и  $y$  называются координатами вектора  $\overrightarrow{OM}$ , т.е.  $\overrightarrow{OM}(x, y)$ . На рис.5  $\overrightarrow{OM}(7; 4)$ . Объясните по...

Если вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$  не проходит через начало координат (рис.6), то  $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2; y_2) - (x_1; y_1)$ . **координат его конца вычесть координаты начала.**

Пример1. Даны точки A (3;2), B(-1;5), C(0;3). Найти координаты векторов  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}$ .

Решение:  $\overline{AB}(-1-3; 5-2)$ ,  $\overline{AB}(-4; 3)$ ;  $\overline{BC}(0-(-1); 3-5)$ ,  $\overline{BC}(1; -2)$ ;  $\overline{AC}(-3; 1)$ .

### Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

- 1) при сложении двух и более числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если  $\vec{a}(x_1; y_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2)$
- 2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если  $\vec{a}(x_1; y_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2)$
- 3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если  $\vec{a}(x; y)$  и  $k$

Пример 2. Даны векторы  $\vec{a}_1(-2; 4)$ ;  $\vec{a}_2(3; 1)$ . Найти а)  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ; б)  $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ ; в)  $0,4\vec{a}_1$ ; г)  $-\frac{1}{3}\vec{a}_2$ .

Решение. Согласно приведенным правилам, получим:

$$а) \vec{a}_1 + \vec{a}_2(-2+3; 4+1); \vec{a}_1 + \vec{a}_2(1; 5). б) \vec{a}_2 - \vec{a}_1(3-(-2); 1-4); \vec{a}_2 - \vec{a}_1(5; -3).$$

$$в) 0,4\vec{a}_1(-2 \cdot 0,4; 4 \cdot 0,4); 0,4\vec{a}_1(-0,8; 1,6). г) -\frac{1}{3}\vec{a}_2(-\frac{1}{3} \cdot 3; -\frac{1}{3} \cdot 1); \vec{a}_2(-1; -\frac{1}{3}).$$

Ответ:  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2(1; 5)$ ;  $\vec{a}_2 - \vec{a}_1(5; -3)$ ;  $0,4\vec{a}_1(-0,8; 1,6)$ ;  $-\frac{1}{3}\vec{a}_2(-1; -\frac{1}{3})$ .

### Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости

Длина вектора, выходящего из начала координат (см. рис.5), равна квадратному корню из суммы квадратов его координат:

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Если вектор задан двумя точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , то  $|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

Пример 3. Найти длину вектора  $\overline{AB}$ , если А (5; 2), В (8; -2).

Решение. Применяя формулу (2), получим  $|\overline{AB}| = \sqrt{(8-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ .

Ответ:  $|\overline{AB}| = 5$ .

### Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (3)$$

Если векторы заданы своими координатами  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ , то скалярное произведение находят так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (4)$$

Пример 4 В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 4, найти скалярное произведение векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ .

Решение: так как углы в равностороннем треугольнике по  $60^\circ$ , то, используя формулу (3), получим  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 8$ .

Ответ: 8.

Используя формулы (1), (3), (4), можно вывести формулу для нахождения косинуса угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad (5)$$

Пример 5 Найти угол А в треугольнике ABC, если А(6;7), В(3;3), С(1;-5).

Решение: Определим координаты векторов  $\overline{AB}\{-3; -4\}$ ,  $\overline{AC}\{-5; -12\}$ . Вычислим косинус угла между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ :

$$\cos \angle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-3 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}} = \frac{63}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65}.$$

$$\angle(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arccos \frac{63}{65}. \text{ Ответ: } \arccos \frac{63}{65}.$$

1. Найти координаты векторов  $\overline{AB}; \overline{CB}; \overline{CA}$ , если  $\overline{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \overline{CB} = -5\vec{i}; \overline{CA} = \vec{i} - 7\vec{j}$ .
2. Найти координаты векторов  $\overline{BA}; \overline{BC}; \overline{AC}$ , если  $\overline{BA} = 3\vec{i} - 5\vec{j}; \overline{BC} = 4\vec{j}; \overline{AC} = -8\vec{i} + \vec{j}$ .
3. Даны точки A(3;-1); B(0;-5); C(-2;1). Найти:  $\overline{AB}; \overline{BC}; \overline{CA}; \overline{AB} + \overline{BC}; \overline{AC} - \overline{AB}; \overline{m} = 2\overline{AB} + 3\overline{BC} - 0,5\overline{CA}$ .
4. Даны точки A(4;0), B(-1;3), C(5;7). Найти:  $\overline{AC}; \overline{AB}; \overline{BC}; \overline{AB} + \overline{BC}; \overline{AB} - \overline{BC}; \overline{m} = -3\overline{AB} + 2\overline{BC} - 5\overline{AC}$ .
5. Дан треугольник с вершинами F(7;7), D(4;3), C(3;4). Найти его периметр.
6. Дан треугольник ABC, A(-4;1), B(-2;4), C(0;1). Доказать, что данный треугольник равнобедренный.
7. Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке O. Найди угол между векторами:
  - а)  $\overline{DC}$  и  $\overline{AD}$ , б)  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , в)  $\overline{OA}$  и  $\overline{OC}$ ;
8. Диагонали ромба ABCD пересекаются в точке O, и диагональ BD равна стороне ромба. Найди угол между векторами:
  - а)  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ ; б)  $\overline{DB}$  и  $\overline{OB}$ ; в)  $\overline{OC}$  и  $\overline{OD}$ .
9. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{a}\{3;5\}, \vec{b}\{-2;7\}$  и определить вид угла между данными векторами.
10. Вычислите скалярное произведение векторов и определить вид угла, образованного между векторами  $\vec{a}\{3;5\}, \vec{b}\{-2;7\}$ .
11. Найти угол между векторами  $\overline{FD}$  и  $\overline{DC}$ , если F(1;6), D(1;0), C(-2;3).
12. Найти угол между векторами  $\overline{RL}$  и  $\overline{OP}$ , если R(0;3), O(6;-1), L(5;0), P(9;4).

### Тема 3.2. Понятия уравнения линии и уравнение поверхности

Практическая работа №

Задачи на уравнение прямой и плоскости

#### Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Прямые и плоскости в пространстве». Закрепить навыки работы с векторами.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Содержание практической

#### Вариант 1.

1. В треугольнике ABC середины сторон AB и BC лежат в плоскости  $\alpha$ , а сторона AC не лежит в этой плоскости. Доказать, что AC параллельна  $\alpha$ .
2. Известно, что прямые a и b параллельны, прямая a перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , прямая c лежит в  $\alpha$ . Доказать, что c перпендикулярна b. Сделайте чертеж и обоснуйте ответ.
3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4 см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр к одной из сторон. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин прямоугольника.

#### Вариант 2.

1. Дан куб ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>. Выпишите: а) две пары ребер, принадлежащих параллельным прямым; б) две пары граней, принадлежащих параллельным плоскостям.
2. Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30°. Чему равна длина проекции наклонной на плоскость?
3. Дан прямоугольный треугольник со сторонами 3 и 4 см, в вершине острого угла восстановлен перпендикуляр к гипотенузе. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин треугольника.

### Вариант 3.

1. Прямые  $a$  и  $c$  параллельны, а прямые  $a$  и  $b$  пересекаются. Могут ли прямые  $b$  и  $c$  быть параллельными?
2. Точки  $A$  и  $B$  расположены по одну сторону плоскости  $\alpha$ ,  $AC$  и  $BD$  – перпендикуляры к этой плоскости. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до сторон прямоугольника.
3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4 см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до сторон прямоугольника.

### Тема 3.2. Понятия уравнения линии и уравнение поверхности

#### Практическая работа №

#### Уравнение окружности, эллипса, гиперболы

Цель работы:

сформировать у студентов представление о кривых второго порядка;  
научиться использовать свойства окружности и эллипса при решении различных задач;  
повышать математическую культуру студентов.

Основной теоретический материал.

Кривые второго порядка: эллипс, окружность, парабола, гипербола.

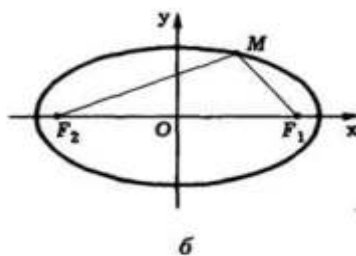
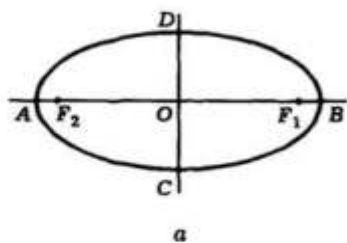
Кривыми второго порядка на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостью.

Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается эллипс. Если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является парабола.

Эллипс описывается уравнением:  $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Эллипс.

Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  постоянна, называется эллипсом.



Каноническое уравнение эллипса:

Для любого эллипса можно написать каноническое уравнение

уравнением (каноническое уравнение эллипса)

центром в начале координат,  $a$  – большая полуось эллипса,  $b$  – малая полуось эллипса,  $c$  – фокальный радиус.

Свойства эллипса:

Фокальное свойство. Если  $F_1$  и  $F_2$  – фокусы эллипса,  $M$  – точка на эллипсе, то  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ .

Свойство касательной. Угол между касательной в точке  $M$  и прямой  $(F_1M)$  равен углу между этой касательной и прямой  $(F_2M)$ .

Прямая, проведенная через середины отрезков, отсекаемых двумя параллельными прямыми, пересекает эллипс в двух точках. Эти точки являются концами диаметра эллипса.

Построение эллипса с помощью циркуля и линейки легко получить центр эллипса, а в дальнейшем оси, вершины эллипса.

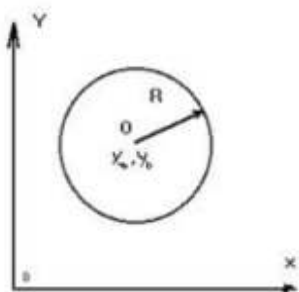
Эволютой эллипса является астроида.

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (0 \leq e < 1).$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение  $e = \frac{c}{a}$ . Эксцентриситет эллипса больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он больше напоминает эллипс.

Эллипс также можно описать как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фокусов  $F_1$  и  $F_2$ .

Эллипс также можно описать как геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фокусов  $F_1$  и  $F_2$ .



фигуру, которую можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование. Эллипс можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование. Эллипс можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование.

Пересечение плоскости и кругового цилиндра.

Окружность.

Окружность — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от центра. Расстояние от центра до любой точки окружности называется её радиусом.

Каноническое уравнение окружности.

Общее уравнение окружности записывается как:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

Точка  $(x_0, y_0)$  — центр окружности,  $R$  — её радиус. Уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в  $(x_0, y_0)$ .  
Свойства окружности:

Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная).

Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания.

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.

Длину окружности с радиусом  $R$  можно вычислить по формуле  $C = 2\pi R$ .

Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет его до  $180^\circ$ .

Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен  $90^\circ$ .

Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полусумме дуги, лежащей в угле и дуги напротив нее.

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее.

Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой.

Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с радиусами, проведенными к точкам касания.

При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой хорды.

Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей, проведенной из этой точки, равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.

Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности.

Окружность является простой плоской кривой второго порядка.

Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.

## Содержание практической работы № 3

### Вариант 1.

Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты:  $(0;3)$  и  $(6; -7)$

Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке с координатами  $(-2;3)$ .

3) Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках:  $(0;-8)$  и  $(0;8)$ , а фокусы эллипса в точках:  $(-5;0)$  и  $(5;0)$ .

4) Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси  $OX$ , если большая ось равна 10, а эксцентриситет равен 0,6.

5) Найдите длину отрезка прямой  $x-2y-2=0$ , заключенного внутри эллипса  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

### Вариант 2.

Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты:  $(-2;3)$  и  $(2;5)$

Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке с координатами  $(2;5)$ .

Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках:  $(0;-4)$  и  $(0;4)$ , а фокусы эллипса в точках:  $(-5;0)$  и  $(5;0)$ .

Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси  $OX$ , если малая ось равна 16, а эксцентриситет равен 0,6.

Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку  $A(18;-4)$

## Тема 3.2. Понятия уравнения линии и уравнение поверхности

### Практическая работа № 4

#### Поверхности второго порядка

1. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

А)  $7x^2 - 9y^2 = 63$

Б)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

В)  $x^2 - 64y^2 = 576$

Г)  $x^2 - 49y^2 = 1$

Д)  $36x^2 - 121y^2 = 1$

Е)  $16x^2 - 9y^2 = 144$

2. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси ОУ, если действительная ось равна 10.

3. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная ось которой  $2b=10$ , а уравнение асимптот  $y = \pm 2x$ .

4. Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ОУ равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы.

5. Составить уравнение равносторонней гиперболы:

А) с фокусами на оси ОХ, проходящей через точку (-10; 8)

Б) с фокусами на оси ОХ, проходящей через точку (-7; -3)

В) с фокусами на оси ОУ, проходящей через точку (-4; 8)

Г) с фокусами на оси ОУ, проходящей через точку (10; -8)

6. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус: А) (-2; 4) Б) (2; -4)

7. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением:

А)  $y^2 = 24x$ ;  $x^2 = -26y$

Б)  $x^2 = 36y$ ;  $y^2 = -16x$

8. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы:

А)  $2x + 6 = 0$ ;  $y - 8 = 0$

Б)  $2y + 7 = 0$ ;  $2x + 40 = 0$

9. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и длины осей эллипса, заданного уравнениями:

А)  $x^2 + y^2 = 1$

Б)  $9x^2 + 64y^2 = 576$

В)  $9x^2 + 4y^2 = 36$

Г)  $64y^2 + 9x^2 = 1$

## Раздел 4. Числовые последовательности и их пределы

### Тема 4.1. Числовые последовательности и их пределы

#### Практическая работа № Предел числовой последовательности

Цели: 1) знать определение предела последовательности, свойства пределов.

3) уметь определять предел последовательности, использовать свойства пределов, решать прикладные задачи.

#### Теоретические сведения

Постоянное число  $A$  — пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ , если для всех  $x$ , сколь угодно мало отличных от  $a$ ,  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , т.е. если при  $x \rightarrow a$ ,  $y \rightarrow A$ , то  $|y - A| < \varepsilon$ .

Правила предельного перехода:

1. Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов  $\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$ ;

$$\lim(x - y) = \lim x - \lim y.$$

2. Предел произведения равен произведению пределов  $\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$

3. Предел отношения равен отношению пределов  $\lim \{x/y\} = \lim x / \lim y$

Свойства пределов:

1.  $\lim A = A$ , если  $A = \text{const}$  предел постоянной равен этой постоянной

2.  $\lim(C \cdot y) = C \cdot \lim y$ , если  $C = \text{const}$  постоянную можно вынести за знак предела.

#### Контрольные вопросы

1. Дайте определение предела функции.

2. Сформулируйте правила предельного перехода.

3. Каковы свойства пределов.

#### Содержание практической работы

1) Доходная эластичность определяется по формуле:  $\varepsilon = \frac{t}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$ .

Относительное изменение спроса зависит от времени  $t$  по формуле: относительное изменение спроса  $\varepsilon = \frac{t}{p} \cdot \frac{dp}{dt}$ .

Вычислить предел эластичности при  $t \rightarrow 2$

2) Вычислить предел функции: ; ; ;

;

## Раздел 5. Предел функции одной вещественной переменной

### Тема 5.1 Предел функции

#### Практическая работа №

#### Определение функции. Графики элемен

**Цель:** сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи

#### Теоретические сведения к практи

Если каждому элементу  $x$  из множества  $X$  по некоторому правилу  $f$  поставлен в соответствие значение  $y$  в множестве  $Y$ , и записывают  $y=f(x)$ .

Множество  $X$  называется областью определения функции  $D(f)$ , а множество  $Y$  – областью значений  $E(f)$ .

*Пример 1.* Найти область определения функции

$$1) y = \frac{15}{x+6}$$

$$x+6 \neq 0$$

$$x \neq -6$$

$$D(y) = (-\infty; -6) \cup (-6; \infty)$$

$$2) y = \frac{x+13}{x^2-7x+12}$$

$$y = \frac{x+13}{x^2-7x+12} = \frac{x+13}{(x-3)(x-4)}$$

$$x-3 \neq 0 \quad x-4 \neq 0$$

$$x \neq 3 \quad x \neq 4$$

$$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; \infty)$$

$$3) y = \sqrt{x^2-81}$$

$$x^2-81 \geq 0$$

$$(x-9)(x+9) \geq 0$$

$$D(y) = (-\infty; -9] \cup [9; \infty)$$

#### Основные свойства функц

Четность и нечетность. Функция  $y=f(x)$  называется четной, если для любых значений  $x$  из области определения выполняется  $f(x)=f(-x)$ . В противном случае функция  $y=f(x)$  называется функцией общего вида.

*Пример 2.* Установить четность или нечетность функции.

$$1) y = x^2 + 6$$

$$y(-x) = (-x)^2 + 6 = x^2 + 6 = y(x)$$

⇒ функция четная

$$2) y = \sin x + 2x$$

$$y(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin x - 2x = -(\sin x + 2x) = -y(x)$$

⇒ функция нечетная

$$3) y = \frac{x+2}{x^2-16}$$

$$y(-x) = \frac{(-x)+2}{(-x)^2-16} = \frac{-x+2}{x^2-16}$$

⇒ функция общего вида

Монотонность. Функция  $y=f(x)$  называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, если для любого  $x_1 < x_2$  из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Ограниченность. Функция  $y=f(x)$  называется ограниченной на некотором промежутке  $X$  из области определения, если существуют такие числа  $M$  и  $m$ , что для любого  $x \in X$  выполняется  $m \leq f(x) \leq M$ .

Периодичность. Функция  $y=f(x)$  называется периодической с периодом  $T > 0$ , если для любых значений  $x$  выполняется  $f(x) = f(x+T)$ .

Если каждому значению цены  $p$  за единицу товара поставлено в соответствие число  $q$  – количество товара, определенное на некотором промежутке времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут  $q=f(p)$ .

Эта функция определена для тех значений  $p \geq 0$ , для которых  $f(p) \geq 0$  и множество ее значений  $q$ . График функции спроса называют кривой спроса.

Пример 3. Функция спроса на некоторый товар имеет вид  $q = 60 - \sqrt{100+p}$ , где  $q$  – количество товара. Область определения и множество значений этой функции

Функцию цены в виде  $p = f^{-1}(q)$

Объем спроса при ценах на товар:  $p_1 = 300; p_2 = 800$

Цену за единицу товара, если  $q_1 = 10; q_2 = 15$ ,

Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ 100+p \geq 0 \\ 60-\sqrt{100+p} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \geq -100 \\ \sqrt{100+p} \leq 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \geq -100 \\ 100+p \leq 3600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \geq -100 \\ p \leq 3500 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq p \leq 3500$$

$$D(f) = [0; 3500]$$

Выразим значение  $p$  через  $q$ :



$$\sqrt{100+p} = 60 - q$$

$$100 + p = (60 - q)^2$$

$$100 + p = 3600 - 120q + q^2$$

$$p = q^2 - 120q + 3500$$

$$p \geq 0, \quad q^2 - 120q + 3500 \geq 0$$

$$q \in (-\infty; 50] \cup [70; \infty)$$

$$q \geq 0, \quad q \in [0; 50] \cup [70; \infty)$$

Из закона спроса следует, что с увеличением цены  $p$  от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. Множество значений функции  $E(f) \in [0; 50]$ .

Функция цены имеет вид  $p = q^2 - 120q + 3500$

$$p_1 = 300 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100 + 300} = 60 - 20 = 40 \quad (\text{тыс.шт.});$$

$$p_2 = 800 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100 + 800} = 60 - 30 = 30 \quad (\text{тыс.шт.});$$

$$q_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 100 - 120 \cdot 10 + 3500 = 2400 \quad (\text{руб.});$$

$$q_2 = 15 \Rightarrow p_2 = 225 - 120 \cdot 15 + 3500 = 1925 \quad (\text{руб.}).$$

Выручка от продажи составляет  $u = pq$ , следовательно,

$$u_1 = p_1 \cdot q_1 = 2400 \cdot 10 = 24000 (\text{руб.})$$

$$u_2 = p_2 \cdot q_2 = 1925 \cdot 15 = 28875 (\text{руб.})$$

Если каждому значению цены  $p$  за единицу товара поставлено в соответствие число  $q$  – количество единиц товара, определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут  $q = \varphi(p)$ .

Эта функция определена для тех значений  $p \geq 0$ , для которых  $\varphi(p) \geq 0$  и множество ее значений

$$q = \frac{1}{9}(p-2)^2 - 1, \quad \text{где}$$

*Пример 4.* Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид  $q = \frac{1}{9}(p-2)^2 - 1$ , где  $q$  – количество единиц товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений функции  $q$

Объем предложения при ценах за единицу товара:  $p_1 = 11; p_2 = 20$

Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию  $p = \varphi^{-1}(q)$

Решение: 1) Найдем область определения:

$$\frac{1}{9}(p-2)^2 - 1 \geq 0$$

$$(p-2)^2 - 9 \geq 0$$

$$(p-2-3)(p-2+3) \geq 0$$

$$(p-5)(p+1) \geq 0$$

$$p \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty)$$

$$\text{Т.к. } p \geq 0 \Rightarrow p \in [5; \infty)$$

Множество значений функции  $q$  при  $p \geq 5$  будет  $q \in [0; +\infty)$ .

$$p_1 = 11; q_1 = \frac{1}{9}(11-2)^2 - 1 = 9 - 1 = 8 \text{ (тыс.шт.)}$$

При  $p_2 = 20; q_2 = \frac{1}{9}(20-2)^2 - 1 = 36 - 1 = 35 \text{ (тыс.шт.)}$

Найдем функцию  $p = \varphi^{-1}(q)$

$$q = \frac{1}{9}(p-2)^2 - 1$$

$$\frac{1}{9}(p-2)^2 = q+1$$

$$(p-2)^2 = 9(q+1)$$

$$p-2 = \pm\sqrt{9(q+1)}$$

$$p-2 = \pm 3\sqrt{(q+1)}$$

$$p = 2 + 3\sqrt{(q+1)} \quad p = 2 - 3\sqrt{(q+1)}$$

Т.к.  $p \geq 5$ ,  $p = 2 + 3\sqrt{(q+1)}$

## Содержание практической р

**Задание 1.** Найти область определения функции

$$1) y = \frac{32+x}{(x-4)(x+9)}$$

$$2) y = \frac{29-x}{x^2+15x}$$

$$3) y = \frac{4x}{x^2-5x+6}$$

$$4) y = \sqrt{x^2-100}$$

$$5) y = \log_6(x-3)$$

$$6) y = \frac{\sqrt{x+2}}{(x-3)(x+1)}$$

**Задание 2.** Установить четность или нечетность функции.

$$1) y = x^4 - x^2 + 3$$

$$2) y = \frac{x^5+9}{x}$$

$$3) y = -\sin x - 4x$$

$$4) y = e^x + 12$$

$$5) y = \frac{x^2+2}{x^2-16} \cdot \cos x$$

$$6) y = \operatorname{tg} x - 2x$$

**Задание 3.** а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид  $q = 70 - \sqrt{250 + p}$ , где  $q$  – количество то  
Область определения и множество значений этой функции

Функцию цены в виде  $p = f^{-1}(q)$

Объем спроса при ценах на товар:  $p_1 = 150; p_2 = 650$

Цену за единицу товара, если  $q_1 = 15; q_2 = 20$ ,

Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид  $q = 40 - \sqrt{50 + p}$ , где  $q$  – количество товара (тыс. шт).  
Область определения и множество значений этой функции

Функцию цены в виде  $p = f^{-1}(q)$

Объем спроса при ценах на товар:  $p_1 = 175; p_2 = 350$

Цену за единицу товара, если  $q_1 = 10; q_2 = 30$ ,

Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

**Задание 4.** а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид  $q = \frac{1}{4}(p-3)^2 - 1$ , где  $q$  – количество товара (тыс. шт).  
Требуется найти:

Область определения и множество значений функции  $q$

Объем предложения при ценах за единицу товара:  $p_1 = 7; p_2 = 11$

Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию  $p = \varphi^{-1}(q)$

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид  $q = \frac{1}{16}(p-5)^2 - 1$ , где  $q$  – количество товара (тыс. шт).  
Требуется найти:

Область определения и множество значений функции  $q$

Объем предложения при ценах за единицу товара:  $p_1 = 37; p_2 = 53$

Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию

## Тема 5.2 Непрерывность функции

### Практическая работа № Предел и непрерывность

Цели:

- 1) знать определение предела последовательности, свойства пределов, правилами раскрытия неопределенности
- 2) уметь решать прикладные задачи на раскрытие неопределенности.

### Теоретические сведения

Для раскрытия неопределенности вида необходимо предварительно дробь сократить, разложив на множители

Пример 1

=

Здесь использовалась формула:  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Пример 2

= = = 3

В этом примере используется разложение квадратного трехчлена на множители  $(x-x_1)(x-x_2)$

Пример 3

= =

Применяли:  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Для раскрытия неопределенности вида необходимо числитель и знаменатель разделить на  $x$  с наибольшей степенью

Пример 1.

$= \infty$

**Контрольные вопросы**

1. Какой существует прием для раскрытия неопределенности ?
2. Чему равен предел отношения  $1/\infty$  ?  $1/0$ ?

Содержание практической

- 1)
- 2)

3) Минимальный средний уровень торговой надбавки =

Фактический уровень издержек =  $x^3 + 2x^2 + 4$  расчетная ставка налога на добавленную стоимость =  $4x^3 -$

.

;

Для раскрытия неопределенности вида необходимо числитель и знаменатель разделить на  $x$  с наибольшим показателем степени.

Пример 2.

$= \infty$

**Контрольные вопросы**

1. Какой существует прием для раскрытия неопределенности ?
2. Как разложить на множители квадратный трехчлен?
3. Какой существует прием для раскрытия неопределенности ?
4. Чему равен предел отношения  $1/\infty$  ?  $1/0$ ?

**1 вариант**

- 1)
- 2)

3) Минимальный средний уровень торговой надбавки =

Фактический уровень издержек =  $x^3 + 2x^2 + 4$  расчетная ставка налога на добавленную стоимость =  $4x^3 -$

.

;

**2 вариант**

- 1) 2)

- 3) 4)

- 5) 6)

**Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной вещественной переменной**

**Тема 6.1 Производная функции. Основные правила дифференцирования**

Практическая работа №

Производная и дифференциал

Цели:

- 1) знать определение производной функции, производные основных функций, геометрический смысл;
- 2) уметь решать прикладные задачи на определение производной функции.

**Теоретические сведения**

Производной функции  $y=f(x)$  по переменной  $x$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной к графику функции.

Дифференциалом функции  $y=f(x)$  называется главное слагаемое приращения функции, линейное от  $\Delta x$ .

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определение производной.
2. Что называют дифференцированием?
3. Каков геометрический смысл производной?

4. Чему равна производная сложной функции?  
 5. Дайте определение дифференциала функции.

Найти производную функции:

- 1)  $y = \dots$ ; 2)  $y = \dots$ ;  
 3)  $y = \sin^2 x$ ; 4)  $y = 2 + \dots + 1$ ;

- 5)  $y = \cos(x/3)$ ; 6)  $y = \dots$

- 7) Найти дифференциал функции:  $y = 3$

## Тема 6.2 Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

### Практическая работа № Теоремы о дифференцируемых

Цели:

- 1) знать правила нахождения производной сложной функции  
 2) уметь решать прикладные задачи на определение производной функции.

### Теоретические сведения

Формулы дифференцирования:

- 1)  $C = \text{const}$ ,  $(C)' = 0$ ; 2)  $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$ ;  
 3)  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ ; 4)  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ;  
 5)  $\dots$ ; 6)  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$   
 7)  $(\sin x)' = \cos x$ ; 8)  $(\cos x)' = -\sin x$ .

Производная сложной функции:  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

- 8)  $y = \dots$ ,  $dy = 3 \cdot \cos x + (-\sin x)$ .

ПРИМЕРЫ: Воспользуемся правилом нахождения производной суммы-разности функций, прави

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ . Помним, что производная постоянного равна нулю!

а)  $f(x) = \frac{x^3}{9} + 4x^2 - \frac{x}{3} + 14\sqrt{x} + \sqrt{e^5}$ , найти  $f'(4)$ :

$$f'(x) = \left( \frac{x^3}{9} + 4x^2 - \frac{x}{3} + 14\sqrt{x} + \sqrt{e^5} \right)' = \frac{(x^3)'}{9} + 4(x^2)' - \frac{(x)'}{3} + 14(\sqrt{x})' + (\sqrt{e^5})' =$$

$$= \frac{3 \cdot x^2}{9} + 4 \cdot 2x - \frac{1}{3} + 14 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{x^2}{3} + 8x - \frac{1}{3} + \frac{7}{\sqrt{x}}; f'(4) = \frac{4^2}{3} + 8 \cdot 4 - \frac{1}{3} + \frac{7}{\sqrt{4}} = \frac{16}{3} + 32 - \frac{1}{3} + \frac{7}{2} = \frac{16-1}{3} + \frac{7}{2} = \frac{15}{3} + \frac{7}{2} = 5 + \frac{7}{2} = \frac{10+7}{2} = \frac{17}{2}$$

б)  $f(x) = \frac{5}{4 \cdot \sqrt[5]{x^4}} = \frac{5}{4 \cdot x^{4/5}} = \frac{5}{4} \cdot x^{-4/5}$ , найти  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \left( \frac{5}{4 \cdot \sqrt[5]{x^4}} \right)' = \frac{5}{4} \cdot (x^{-4/5})' = \frac{5}{4} \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) \cdot x^{-4/5-1} = -1 \cdot x^{-9/5} = -\frac{1}{x^{9/5}} = -\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}$$

в,г,д)  $f(x) = \frac{2}{5} \cdot \text{ctgx} - \frac{3 \cdot e^x}{4} + 2 \cdot 2^x - 6 \cdot \log_3 x$ , найти  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \left( \frac{2}{5} \cdot \text{ctgx} - \frac{3 \cdot e^x}{4} + 2 \cdot 2^x - 6 \cdot \log_3 x \right)' = \frac{2}{5} \cdot (\text{ctgx})' - \frac{3 \cdot (e^x)'}{4} + 2 \cdot (2^x)' - 6 \cdot (\log_3 x)' =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) - \frac{3 \cdot e^x}{4} + 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 6 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} = -\frac{2}{5 \sin^2 x} - \frac{3e^x}{4} + 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - \frac{6}{x \cdot \ln 3}$$

а)  $f(x) = (x^2 - 1)(x^4 + 2)$ , найти  $f'(x)$ ;      б)  $f(x) = \frac{x^3}{2x+1}$ , найти  $f'(-1)$ ;

в)  $f(x) = \frac{\ln x}{2x^4} - e^2$ , найти  $f'(1)$ ;      г)  $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ , найти  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

### Тема 6.3 Производные и дифференциалы высших порядков

#### Практическая работа № Формула Тейлора

Цель знать возможности использования формулы Тейлора для доказывания теоремы в дифференциальном исчислении.  
Теоретические сведения

#### Формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

где  $R_n(x)$  - остаточный член формулы Тейлора.

#### Формула Тейлора для многочлена.

Есть функция  $f(x)$  и многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$ :

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Преобразуем этот многочлен в многочлен степени  $n$  относительно разности  $x-x_0$ , где  $x_0$  — любое число.

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \dots + A_n(x-x_0)^n \quad (1)$$

Для определения коэффициентов  $A_0, A_1, \dots, A_n$  дифференцируем  $n$  раз равенство (1):

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x-x_0) + 3A_3(x-x_0)^2 + \dots + nA_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x-x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4(x-x_0) + \dots + n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3},$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1A_n$$

Подставляем  $x=x_0$  в равенства, которые мы получили и равенство (1), получаем:

$$P_n(x_0) = A_0, \quad \text{т. е. } A_0 = P_n(x_0),$$

$$P_n'(x_0) = A_1, \quad \text{т. е. } A_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!},$$

$$P_n''(x_0) = 2A_2, \quad \text{т. е. } A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!},$$

$$P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3A_3, \quad \text{т. е. } A_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1A_n, \quad \text{т. е. } A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляем определенные значения  $A_0, A_1, \dots, A_n$  в равенство (1), получаем разложение многочлена  $P_n(x)$  по степеням  $(x-x_0)$ :

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Эта формула является **формулой Тейлора для многочлена  $P_n(x)$  степени  $n$ .**

#### Формула Тейлора для произвольной функции.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (c = x_0 + \theta(x-x_0), 0 < \theta < 1).$$

#### Остаточный член формулы Тейлора.

В форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Содержание практической работы № 6

1. Разложим по формуле Тейлора функцию  $y = \operatorname{tg} x$  по степеням  $x$  (т.е.  $x_0 = 0$ ) до члена  $x^3$  включительно.

#### Тема 6.4 Использование производной при исследовании функции

Практическая работа № 6

Исследование функций и построение их графиков

Цели:

- 1) знать алгоритм исследования функции с помощью производной
- 2) уметь решать прикладные задачи на исследование функции с помощью производной.

Теоретические сведения

Функция  $y=f(x)$  монотонно возрастает, если большему значению аргумента  $x$  соответствует большее значение функции и производная  $>0$ .  
 Функция  $y=f(x)$  монотонно убывает, если большему значению аргумента  $x$  соответствует меньшее значение функции и производная  $<0$ .

В точке экстремума производная функции равна нулю.

Признаки максимума: производная в точке максимума равна нулю, и в этой точке меняет знак с «плюс» на «минус».

Признаки минимума: производная в точке минимума равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс».

Пример 1. Исследовать функцию  $y=2x^2-3x$

А) Определим точки, в которых производная равна нулю.  $y'=4x-3$

$4x-3=0$ ;  $x_0=3/4$ ; точка экстремума  $x_0=3/4$ .

Б) Определим знак производной при  $x < x_0$ .  $y'(1/2)=4 \cdot 1/2 - 3 = -1 < 0$ ;  $y'(x < x_0) < 0$ .

В) Определим знак производной при  $x > x_0$ .  $y'(1)=4 \cdot 1 - 3 = 1 > 0$ ;

$y'(x > x_0) > 0$ .

Г) Точка экстремума  $x=3/4$  в этой точке производная меняет знак с «-» на «+», значит в точке  $x=3/4$  функция возрастает.

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл производной функции?
2. Каков признак возрастания функции?
3. Каков признак убывания функции?
4. Каков признак минимума функции?
5. Каков признак максимума функции?
6. Чему равна производная функции в точке минимума или максимума?

Содержание практической работы № 7

1. Найти экстремумы и точки минимума и максимума, участки возрастания и убывания функции:

- 1)  $y = x^2 - 1$ ; 2)  $y = (1/3)x^3 - (3/2)x^2 - 4x + 6$ ;
- 3)  $y = 4x^2 - 12$ ; 4)  $y = x^5$
- 5)  $y = 3x^3$  6)  $y = x^2 - 6x + 3$
- 7)  $y = -2x^2 + 8x - 5$

Найдите дифференциал функций:

1)  $y = x^3 \cos x$ ; 2)  $y = \sin x$ ; 3)  $y = \ln x$

Исследуйте функции и постройте их графики:

- 1)  $Y = (1/3)x^3 - 9x$
- 2)  $Y = 3x^3 - x$
- 3)  $Y = 2x^3 - 5x^2 - 12x + 2$
- 4)  $Y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 1$
- 5)  $Y = x^4 + x^2/2 - 1$

- 6)  $Y=x^3+3x^2-4$
- 7)  $Y=x^4+4x^3-8x^2-5$
- 8)  $Y=3x^4-4x^3$
- 9)  $Y=-(1/4)x^4+2x^2$
- 10)  $Y=-3x^5+5x^3$
- 11)

## Раздел 7 Интегральное исчисление функции одной вещественной переменной

### Тема 7.1. Неопределенный интеграл

#### Практическая работа № Вычисление неопределенного интеграла

**Цель:** совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и интегрирования по частям.

#### Теоретические сведения

Функция  $F(x)$ , определенная на интервале  $(a, b)$ , называется *первообразной* для функции  $f(x)$ , если  $F'(x) = f(x)$ .

Если  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$ , то любая другая первообразная  $\Phi(x)$  для  $f(x)$  имеет вид  $\Phi(x) = F(x) + C$ , где  $C$  — const.

*Неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$  называется совокупность всех первообразных для  $f(x)$ . Обозначается  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , где  $F'(x) = f(x)$ ,  $C$  — const.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование — обратная операция дифференцированию.

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать полученную первообразную.

Свойства неопределенного интеграла:

1.  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x) dx = f(x) dx;$
2.  $\int dF(x) = F(x) + C;$
3.  $\int kf(x) dx = k\int f(x) dx, \quad k$  — const;
4.  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

#### Таблица основных интегралов

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\int 0 du = C; \quad C = \text{const};$                                      | 2. $\int du = u + C;$                           |
| 3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$ | 3a. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$ |
| 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u  + C;$   | 5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$       |
| 6. $\int e^u du = e^u + C;$  | 7. $\int \cos u du = \sin u + C;$               |



8. $\int \sin u \, du = -\cos u + C;$	9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C;$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C;$	11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left  u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right  + C;$	13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{u-a}{u+a} \right  + C;$	15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left  \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right  + C;$
16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right  + C;$	17. $\int \operatorname{tgu} \, du = -\ln  \cos u  + C;$
18. $\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln  \sin u  + C.$	

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек, в которых нулю равен знаменатель. Использование таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

### Метод замены переменных

*Теорема 1.* Пусть  $x = \varphi(t)$  монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

При этом, если  $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C$ , то  $\int f(x) dx = F(\psi(x)) + C$ , где  $\psi(x)$  — функция, обратная к  $\varphi$ .

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

### Алгоритм замены переменной

- 1) Связать старую переменную интегрирования  $x$  с новой переменной  $t$  с помощью замены  $x = \varphi(t)$ .
- 2) Найти связь между дифференциалами  $dx = \varphi'(t) dt$ .
- 3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.
- 4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив  $t = \psi(x)$ .

*Пример 1.* Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а)  $\int \cos 4x dx$ ; б)  $\int e^{9x+1} dx$ ; в)  $\int x(2-x^2)^5 dx$

*Решение:*

$$a) \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

$$б) \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \frac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{l} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2x dx \\ x dx = \frac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left( -\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2-x^2)^6 + C.$$

### Интегрирование по частям

Некоторые виды интегралов, вычисляемые по частям

Если производные функций  $U = U(x)$  и  $V = V(x)$  непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU,$$

называемая *формулой интегрирования по частям*.

В качестве  $U(x)$  обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же

Таблица 1

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
---------------	--------------------	--------------------

$\int P_n(x) \sin kx \, dx$ $\int P_n(x) \cos kx \, dx$ $\int P_n(x) e^{kx} \, dx$ $n = 1, 2, \dots$	$U = P_n(x) \rightarrow$ $\rightarrow dU = P_n'(x) dx$	$dV = \sin kx \, dx \rightarrow V = -\frac{1}{k} \cos kx$ $dV = \cos kx \, dx \rightarrow V = \frac{1}{k} \sin kx$ $dV = e^{kx} \, dx \rightarrow V = \frac{1}{k} e^{kx}$
---	---	---

Вид интеграла	$U \rightarrow dU$	$dV \rightarrow V$
$\int \ln kx P_n(x) dx$	$U = \ln kx \rightarrow dU = \frac{dx}{x}$	
$\int \arcsin kx P_n(x) dx$	$U = \arcsin kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{\sqrt{1-k^2 x^2}}$	
$\int \arccos kx P_n(x) dx$	$U = \arccos kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{\sqrt{1-k^2 x^2}}$	$dV = P_n(x) dx \rightarrow$ $\rightarrow V = \int P_n(x) dx$
$\int \operatorname{arctg} kx P_n(x) dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \rightarrow dU = \frac{k dx}{1+k^2 x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx P_n(x) dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx \rightarrow dU = -\frac{k dx}{1+k^2 x^2}$	
$n = 0, 1, 2, \dots$		

$P_n(x)$  — многочлен от  $x$  степени  $n$ , т. е.  $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ , где  $a_0 \neq 0$ .

Пример 2. Проинтегрировать по частям.

а)  $\int (3x-1) \sin 2x dx$ ; б)  $\int (1+2x) \ln x dx$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int (3x-1) \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \rightarrow dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \rightarrow V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1) \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \\
 &= -\frac{1}{2}(3x-1) \cos 2x + \frac{3}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1) \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

**Задание 1.** Проинтегрировать функции заменой переменной:

- 1)  $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$        $\int \frac{x dx}{\sqrt{2+x^2}}$        $\int e^{1-3x} dx$
- 2)  $\int (2x-1)\cos(x^2-x) dx$        $\int x\sqrt{5+x^2} dx$        $\int e^{6x+5} dx$
- 3)  $\int 10^{2x+1} dx$        $\int \sin \frac{x}{2} dx$        $\int \frac{dx}{5x+3}$
- 4)  $\int x^2(3-x^3)^{10} dx$        $\int \cos 2x dx$        $\int e^{\sin x} \cos x dx$
- 5)  $\int \frac{dx}{x \ln x}$        $\int \sin 2x dx$        $\int 3^{7x-1} dx$
- 6)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$        $\int \sin(2-3x) dx$        $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

**Задание 2.** Найти интеграл интегрированием по частям:

- 1)  $\int (7x-1)\cos x dx$        $\int \operatorname{arctg} x dx$
- 2)  $\int (6-5x)e^x dx$        $\int (7x+5)\ln x dx$
- 3)  $\int x \cos x dx$        $\int \operatorname{arccotg} x dx$
- 4)  $\int (1+2x)\cos x dx$        $\int \arcsin x dx$
- 5)  $\int (8x-1)\sin 5x dx$        $\int (6+5x)\ln x dx$
- 6)  $\int x e^x dx$        $\int (3x+2)\ln x dx$

## Тема 7.2. Определенный интеграл

### Практическая работа №

### Приложения определенного интеграла

**Цель:** сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин

### Теоретические сведения к практике

Площади плоских фигур

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	-2	-1	-1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например  $(0, 2)$  и  $(-1, -1)$ .

Найдем координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  пересечения параболы  $y = x^2 - 2$  и прямой  $y = 3x + 2$ .  
Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда  $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$ ,  $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$ . Итак,  $M_1(-1, -1)$ ,  $M_2(4, 14)$ .

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$f_2(x) = 3x + 2$ ,  $f_1(x) = x^2 - 2$ , поскольку  $f_2(x) \geq f_1(x)$  для всех  $x \in [-1, 4]$ . Получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 (3x + 2 - (x^2 - 2)) dx = \int_{-1}^4 (3x - x^2 + 4) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \\ &= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left( \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = \\ &= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции  $y = y(t)$  и  $x = x(t)$  имеют непрерывные производные первого порядка

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1],$$

прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , где  $a = x(t_0)$ ,

$b = x(t_1)$ , и осью  $OX$ , вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:  
 $x = 2 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат  $(x, y)$  точек кривой,

t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
x	2	0	-2	0	2
y	0	3	0	-3	0

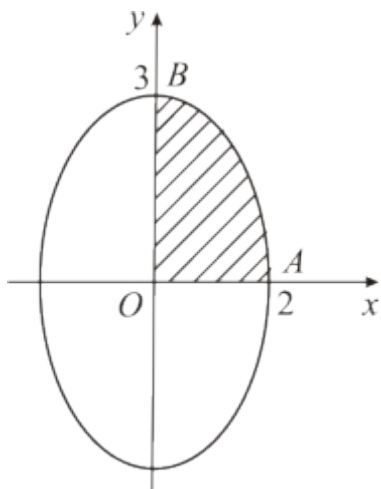


Рис. 3

Нанесем точки  $(x, y)$  на координатную плоскость  $XOY$  и соединим плавной линией. Когда параметр

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

(известно, что — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  по осям  $OX$  и  $OY$ , найдем её площадь  $S$ , умножив на 4 площадь криволинейной трапеции  $AOB$ . Согласно формуле

$$\begin{aligned} S &= 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin t (2 \cos t)' dt \right| = 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right| = \left. \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2 \alpha \text{ из таблицы 2} \end{array} \right\} = \\ &= 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \\ &= 4 \left| -3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left( 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) \right| = 4 \left| -3 \frac{\pi}{2} \right| = 6\pi \approx 18,850 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Вычисление объемов тел

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = -4x^3$  и  $y = -4x$ . Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 1).

Чтобы получить объем тела вращения из объема  $V_1$  тела, полученного вращением фигуры

$$V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi$$

искомый объем  $V = V_1 - V_2$ . По формуле (12) найдем  $V_1$  и  $V_2$ :

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^3)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической

**Задание 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

- 1)  $y = x^2 - 2, y = 1 - 2x$
- 2)  $y = x^3, y = 8, x = 0$
- 3)  $y = 3x^2 + 1, y = 3x + 6$
- 4)  $y = x^2, y = x + 1$
- 5)  $y = x^2, y = 2 - x^2$
- 6)  $y = x^2 - 1, y = 1 - x$

**Задание 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

- 1)  $x = 2t - t^2, y = t(t - 1), 0 \leq t \leq 1$
- 2)  $x = t^2 - 1, y = t^3 - t, 0 \leq t \leq 1$
- 3)  $x = 2\sin t, y = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- 4)  $x = \ln t, y = (t - 1)(3 - t), 1 \leq t \leq 3$
- 5)  $x = 1 - \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- 6)  $x = \cos t, y = 1 - \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

**Задание 3.** Найти длину дуги кривой.

- 1)  $y = 1 + \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
- 2)  $x = t^2 - 1, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$
- 3)  $y = x^{\frac{2}{3}} + 1, 0 \leq x \leq 1$
- 4)  $x = t^2 - 1, y = \frac{t}{3} - t^3, 1 \leq t \leq 2$
- 5)  $y = x^{\frac{2}{3}}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
- 6)  $x = t^3 - 4, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$

**Задание 4.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями

- 1)  $x^2 - y = 0, y = 1$
- 2)  $x^2 + y = 0, y = -1$
- 3)  $x - y^2 = 0, x = 1$
- 4)  $y = 4x^3, x = 0, y = -4$
- 5)  $y = 4x^3, x = 1, y = 0$
- 6)  $y = -4x^3, x = -1, y = 0$

**Тема 7.3. Несобственные интегралы**

Цель: 1) знать определение несобственного интеграла  
3) уметь вычислять несобственные интегралы

### Теоретические сведения

Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $[a; \infty)$  и интегрируема на любом конечном отрезке  $[a; b]$

называют **несобственным интегралом первого рода** (или несобственным интегралом по бесконечности)

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Таким образом, по определению,

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

Если предел справа существует и конечен, то несобственный интеграл  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  называют **сходящимся**, а несобственный интеграл **расходится**.

Аналогично можно ввести понятие несобственного интеграла от функции  $f(x)$  по промежутку  $(-\infty; b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

А несобственный интеграл от функции  $f(x)$  по промежутку  $(-\infty; +\infty)$  определяется как сумма введенных

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

где  $a$  – произвольная точка. Этот интеграл сходится, если сходятся оба слагаемых, и расходится, если хотя бы один из них расходится.

Во многих задачах, приводящих к несобственным интегралам, не обязательно знать, чему равен этот интеграл. Для этого используют признаки сходимости. **Признаки сходимости несобственных интегралов:**

1) Признак сравнения.

2) Пусть для всех  $x \in [a; +\infty)$   $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Тогда, если  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходится, то сходится и  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

расходится и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ .

2) Если сходится  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ , то сходится и  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  (последний интеграл в этом случае называется **абсолютно сходящимся**).  
Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций.

### Пример 1.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ; б)  $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ ; в)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$



$$\text{г) } \int_{-\infty}^0 \frac{(x+1)dx}{1+x^2}; \quad \text{д) } \int_0^{+\infty} (x+1) \sin x dx$$

Решение.

а) По определению имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен  $\frac{\pi}{2}$ .

б) Аналогично

$$\begin{aligned} \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{-2} x}{-2} \Big|_e^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2 \ln^2 x} \Big|_e^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{2 \ln^2 b} - \frac{-1}{2 \ln^2 e} \right) = \left( \frac{-1}{2 \ln^2 \infty} + \frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} \right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен  $\frac{1}{2}$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

в) По определению  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$ , причем,  $a$  – произвольное число. Положим в

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -e^{-x} \right) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -e^{-x} \right) \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -e^0 + e^{-a} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -e^{-b} + e^0 \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -e^0 + \frac{1}{e^a} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^b} + e^0 \right) = \left( -1 + \frac{1}{\infty} \right) + \left( \frac{1}{\infty} + 1 \right) = -1 + 0 + 0 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Данный интеграл сходится.

$$\begin{aligned} \text{г) } \int_{-\infty}^0 \frac{(x+1)dx}{1-x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{1-x^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{x dx}{1-x^2} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1-x^2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} \int_a^0 \frac{-2x dx}{1-x^2} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} \int_a^0 \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( \ln \left| \frac{1+0}{1-0} \right| - \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln \left| 1-x^2 \right| \Big|_a^0 + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( \ln 1 - \ln \left| \frac{1+1}{1-1} \right| \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} (\ln 1 - \ln |1 - a^2|) + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left( 0 - \ln \left| \frac{1}{\infty} + 1 \right| \right) = -\frac{1}{2} (0 - \ln |1 - \infty|) + \frac{1}{2} \left( -\ln \left| \frac{1}{\infty} + 1 \right| \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\ln \infty) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{0+1}{0-1} \right| = \infty - 0 = \infty.
\end{aligned}$$

Значит, данный интеграл расходится.

$$\int_0^{+\infty} (x+1) \sin x dx$$

д) Рассмотрим  $\int_0^{+\infty} (x+1) \sin x dx$ . Чтобы найти первообразную подынтегральной функции, необходимо

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (x+1) \sin x dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b (x+1) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x+1, \quad dv = \sin x dx, \\ du = dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -(x+1) \cos x \Big|_0^b + \int_0^b \cos x dx \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -(b+1) \cos b + (0+1) \cos 0 + \sin x \Big|_0^b \right) = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -(b+1) \cos b + 1 + \sin b - \sin 0 \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -(b+1) \cos b + 1 + \sin b \right) \\
&\quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b
\end{aligned}$$

Поскольку ни  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ , ни  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b$  не существуют, то не существует и

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -(b+1) \cos b + 1 + \sin b \right)$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

## Содержание практической

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$$

Исследовать сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$  в зависимости от  $n$ .

Решение.

При  $n \neq 1$  имеем:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} &= \int_1^{+\infty} x^{-n} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-n} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-n)} \Big|_1^b = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{n-1}}{(1-n)} - \frac{1^{n-1}}{(1-n)} \right) = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{n-1} - 1)
\end{aligned}$$

Если  $n > 1$ , то  $n-1 > 0$  и  $\lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{n-1} - 1) = (\infty^{n-1} - 1 = \infty - 1) = \infty$

Если  $n < 1$ , то  $n-1 < 0$ , а  $1-n > 0$ , тогда

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{n-1} - 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{b^{1-n}} - 1 \right) = \left( \frac{1}{\infty} - 1 = 0 - 1 \right) = -1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n} \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{n-1} - 1) = \frac{1}{1-n} \cdot (-1) = \frac{1}{1-n}$$

Следовательно, интеграл сходится.

Если  $n = 1$ , то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \ln \infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty$$

следовательно, интеграл расходится.

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \begin{cases} \text{сходится при } n > 1, \\ \text{расходится при } n \leq 1. \end{cases}$$

## Раздел 8. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

### Тема 8.1. Функции нескольких переменных.

#### Практическая работа №

#### Область определения и непрерывность функции

**Цель:** сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, с

#### Теоретические сведения к практ

Функция

$$y = f(x)$$

в точке  $x_0$ , если она: 1) определена в точке  $x_0$ ; 2) имеет конечный предел при  $x \rightarrow x_0$ ; 3) этот предел

Функция называется непрерывной на некотором промежутке  $X$ , если она непрерывна в каждой то

**Пример 1:** Доказать, что функция  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  непрерывна на  $(-\infty; +\infty)$

$$\begin{aligned} \Delta f &= (3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1) - (3x_0^2 - 2x_0 + 1) = 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1 = \\ &= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x \end{aligned}$$

**Решение:**  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x) = 0$

Точка  $x_0$  называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы од  
непрерывны во всех точках, где они определены.

#### Классификация точек разр

$x_0$  – точка устранимого разрыва, если а)  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$

б) в точке  $x_0$  функция не определена

$x_0$  – точка разрыва I рода, если  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$

$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  – скачок функции

$x_0$  – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не

#### Содержание практической

**Задание 1.** Доказать, что функция является непрерывной

а)  $f(x) = x + 9$

б)  $f(x) = x^3 + 8$

в)  $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$

г)  $f(x) = 10x^2 - 12x$

**Задание 2.** Найти точки разрыва и установить их тип

$$a) y = f(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$

$$б) y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$в) y = f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г) y = f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

## Тема 8.2. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных

### Практическая работа №

### Дифференциал функции нескольких

**Цель:** сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом, тригонометрическом, показательном, степенном, геометрическом смысле производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

### Теоретические сведения к практической работе

*Производной функции*  $y = f(x)$  называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Обозначения производной в точке  $x_0$ :

$$f'(x_0), \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}, \left. \frac{df(x_0)}{dx} \right|_{x_0}, y'_x \Big|_{x_0}, y'(x_0)$$

и другие.

*Производной  $n$ -го порядка* называется производная от производной  $(n-1)$ -го порядка, полученная дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка  $y'' = (y')'$  или  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

Производная третьего порядка  $y''' = (y'')'$  или  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  и т. д.

*Пример 1.* Найти производные функций:

$$a) y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}; \quad б) s = (e^t - 2 \ln t) \sin t; \quad в) u = \operatorname{ctg}^3 \frac{v}{3}; \quad г) z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2}.$$

*Решение.*

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = \\ &= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}. \end{aligned}$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5).

$$s = [(e^t - 2 \ln t) \sin t]' = (e^t - 2 \ln t)' \sin t + (e^t - 2 \ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)') \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t = \left( e^t - \frac{2}{t} \right) \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t.$$

в) Сложная степеньная функция,  
т. е.  $v=1$ ; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[ \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)^2 \right]' = 2 \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)' = 2 \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left( -\frac{\left( \frac{v}{3} \right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left( -\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = -\frac{2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{3 \sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования и формулы (3), (14), учитывая, что  $t=1$ , получим:

$$z' = \left( \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1+4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{(2t)'(1+4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0+4 \cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t \operatorname{arctg} 2t}{(1+4t^2)^2}.$$

## Содержание практической

**Задание 1.** Найти производные 1-го порядка данных функций

1) а)  $y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$ ; б)  $s = (1+t^2)(2-3 \operatorname{arctg} t)$ ; в)  $u = \ln^3 \frac{V}{2}$ ; г)  $z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$ .

2) а)  $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$ ; б)  $s = (4-3 \ln t)(5+2 \sin t)$ ; в)  $u = \sin^4(2V+3)$ ; г)  $z = \frac{\sin(2-t)}{2 - \ln 3t}$ . 3) а)  $y = 7x^2 + \frac{4}{x^6}$ .

4) а)  $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$ ; б)  $s = (3t^3-4)(t-2 \cos t)$ ; в)  $u = \ln^2(5V-3)$ ; г)  $z = \frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$ .

5) а)  $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$ ; б)  $s = t^4(4 + \operatorname{arctg} t)$ ; в)  $u = \cos^3(3V+1)$ ; г)  $z = \frac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$ .

**Задание 2.** Составить уравнение касательной и нормали к кривой  $y=f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .

1)  $\frac{x^2-3}{x}$ ,  $x_0 = 1$ .

2)  $\sqrt{5-x^2}$ ,  $x_0 = 2$ .

3)  $\frac{x^2+3x}{3}$ ,  $x_0 = -1$ .

4)  $\sqrt{x}+2x$ ,  $x_0 = 9$ .

$$5) \frac{x^2}{x-2}, x_0 = 1.$$

**Задание 3.** Найти производную  $y'_x$  функции  $y=y(x)$ , заданной параметрически:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$1) \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \cos(2t + 6) \\ y = \sin(2t + 6) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$$

**Задание 4.** Найти дифференциалы функций:

$$1) y = \sin 2x + 5;$$

$$2) y = \ln x - x^3;$$

$$3) y = 4 + 8 \sin x;$$

$$4) y = 2x - 1.$$

$$5) y = 1 - \cos x;$$

**Задание 5.** Найти производную второго порядка функции  $y=f(x)$ .

$$1) y = \ln x + 9$$

$$2) y = \cos x - \ln x$$

$$3) y = \sin x + x^4$$

$$4) y = x^2 + \sin x$$

$$5) y = x + \ln x$$

**Цель:** сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом, геометрическом смысле производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

#### Теоретические сведения к практике

Производной функции  $y = f(x)$  называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента в стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Обозначения производной в точке  $x_0$ :

$$f'(x_0), \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}, \left. \frac{df(x_0)}{dx} \right|_{x_0}, y'_x \Big|_{x_0}, y'(x_0)$$

и другие.

Производной  $n$ -го порядка называется производная от производной  $(n-1)$ -го порядка дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка  $y'' = (y')'$  или  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

Производная третьего порядка  $y''' = (y'')'$  или  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$a) y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3}; \quad б) s = (e^t - 2 \ln t) \sin t; \quad в) u = \operatorname{ctg}^3 \frac{v}{3}; \quad г) z = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' = \\ &= 3 \cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}. \end{aligned}$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5)

$$s = [(e^t - 2 \ln t) \sin t]' = (e^t - 2 \ln t)' \sin t + (e^t - 2 \ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)') \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t = \left( e^t - \frac{2}{t} \right) \sin t + (e^t - 2 \ln t) \cos t.$$

в) Сложная степенная функция, т. е.  $v=1$ ; используя формулу (3), получим:

$$\begin{aligned} u' &= \left[ \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)^2 \right]' = 2 \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right)' = 2 \left( \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \right) \left( -\frac{\left( \frac{v}{3} \right)'}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = \\ &= 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3} \left( -\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2 \frac{v}{3}} \right) = -\frac{2 \operatorname{ctg} \frac{v}{3}}{3 \sin^2 \frac{v}{3}} = -\frac{2 \cos \frac{v}{3}}{3 \sin^3 \frac{v}{3}}. \end{aligned}$$

г) Используя правила дифференцирования и формулы (3), (14), учитывая, что  $t=1$ , получим:

$$\begin{aligned} z' &= \left( \frac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2} \right)' = \frac{(\operatorname{arctg} 2t)'(1 + 4t^2) - (\operatorname{arctg} 2t)(1 + 4t^2)'}{(1 + 4t^2)^2} = \\ &= \frac{(2t)'(1 + 4t^2) - \operatorname{arctg} 2t(0 + 4 \cdot 2t)}{(1 + 4t^2)^2} = \frac{2 - 8t \operatorname{arctg} 2t}{(1 + 4t^2)^2}. \end{aligned}$$

Содержание практической

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

$$1) a) y = 3x^3 - \frac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}; \quad б) s = (1 + t^2)(2 - 3 \operatorname{arctg} t); \quad в) u = \ln^3 \frac{V}{2}; \quad г) z = \frac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}.$$

- 2) а)  $y = 5x - \frac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$ ; б)  $s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$ ; в)  $u = \sin^4(2V + 3)$ ; г)  $z = \frac{\sin(2-t)}{2 - \ln 3t}$ . 3) а)  $y = 7x^2 + \frac{4}{x^6}$
- 4) а)  $y = 5x^2 + \frac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$ ; б)  $s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t)$ ; в)  $u = \ln^2(5V - 3)$ ; г)  $z = \frac{\ln(4 - 5t)}{\sin t}$ .
- 5) а)  $y = x^5 - \frac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$ ; б)  $s = t^4(4 + \arctg t)$ ; в)  $u = \cos^3(3V + 1)$ ; г)  $z = \frac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$ .

**Задание 2.** Составить уравнение касательной и нормали к кривой  $y=f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ .

- 1)  $\frac{x^2 - 3}{x}, x_0 = 1$ .
- 2)  $\sqrt{5 - x^2}, x_0 = 2$ .
- 3)  $\frac{x^2 + 3x}{3}, x_0 = -1$ .
- 4)  $\sqrt{x} + 2x, x_0 = 9$ .
- 5)  $\frac{x^2}{x - 2}, x_0 = 1$ .

**Задание 3.** Найти производную  $y'_x$  функции  $y=y(x)$ , заданной параметрически:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- 1)  $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} x = \cos(2t + 6) \\ y = \sin(2t + 6) \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x = (1 - t)^2 \\ y = \cos(t - 1) \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$
- 5)  $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1 - 4t)^2 \end{cases}$

**Задание 4.** Найти дифференциалы функций:

- 1)  $y = \sin 2x + 5$ ;
- 2)  $y = \ln x - x^3$ ;
- 3)  $y = 4 + 8\sin x$ ;
- 4)  $y = 2x - 1$ .
- 5)  $y = 1 - \cos x$ ;

**Задание 5.** Найти производную второго порядка функции  $y=f(x)$ .

- 1)  $y = \ln x + 9$
- 2)  $y = \cos x - \ln x$
- 3)  $y = \sin x + x^4$



$$4) y = x^2 + \sin x$$

$$5) y = x + \ln x$$

## Раздел 9. Интегральное исчисление функции нескольких переменных

### Тема 9.1 Определение двойного интеграла

#### Практическая работа № Вычисление двойного интеграла

Цели:

- 1) знать: понятие функции двух переменных, предел функции двух переменных, определенный и двойных интегралов,
- 2) уметь находить двойные интегралы сведением его к повторному (двукратному) интегралу.

#### Теоретические сведения

Пусть в некоторой области  $D$  плоскости  $xOy$  задана непрерывная функция  $z=f(x, y)$  (рис.1).

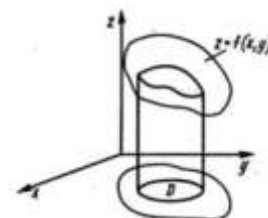


Рис.1

Разобьем область  $D$  произвольным образом на  $n$  элементарных областей с площадями  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Умножим значение функции в этой точке  $f(x_i, y_i)$  на площадь  $\Delta S_i$  соответствующей области и составим сумму  $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ . Предел этой суммы при  $n \rightarrow \infty$  и  $d \rightarrow 0$  называется двойным интегралом функции  $f(x, y)$  в области  $D$ .

**Двойным интегралом** функции  $f(x, y)$  по области  $D$  называется предел этой суммы:

где  $d$  – наибольший из диаметров элементарных областей  $\Delta S_i$ . Функция  $z=f(x, y)$ , для которой предел (1) существует, называется интегрируемой в области  $D$ . В прямоугольных координатах дифференциал площади равен  $dS = dxdy$ , тогда двойной интеграл приписывается виду

Если  $f(x, y) > 0$ , то двойной интеграл функции  $z=f(x, y)$  по области  $D$  равен объему тела, ограниченного поверхностью  $z=f(x, y)$ , образующие которой параллельны оси  $Oz$ , а направляющей служит контур фигуры  $D$ , и снизу плоскостью  $Oxy$ .

#### Основные свойства двойного интеграла.

1°. Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов:

2°. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

3°. Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, т. е. если область  $D$  состоит из частей  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , то

#### Пример 1.

Вычислить двойной интеграл по области  $D$ , ограниченной линиями  $y=x, y=4x, y=4$ .

Решение:

Находим точки пересечения этих линий (рис.5):

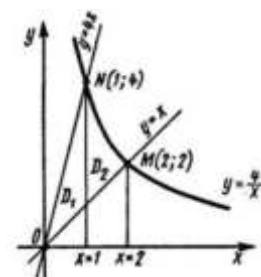


Рис.5

Область  $D$  разобьем на две области  $D_1$  и  $D_2$ , которые соответственно определяются системами неравенств. Вычислим двойной интеграл по области  $D_1$ :

Вычислим двойной интеграл по области  $D_2$ :

Значит,

### Тема 9.2 Приложения двойного интеграла

### Практическая работа № Применение двойных интегралов

**Цель:** сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин

**Теоретические сведения к практике**

*Площади плоских фигур*

*Пример.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \quad y = 3x + 2.$$

*Решение.* Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
y	-2	-1	-1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например  $(0, 2)$  и  $(-1, -1)$ .

Найдем координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  пересечения параболы  $y = x^2 - 2$  и прямой  $y = 3x + 2$ .

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда  $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$ ,  $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$ . Итак,  $M_1(-1, -1)$ ,  $M_2(4, 14)$ .

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой

$f_2(x) = 3x + 2$ ,  $f_1(x) = x^2 - 2$ , поскольку  $f_2(x) \geq f_1(x)$  для всех  $x \in [-1, 4]$ . Получим:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^4 (3x+2-(x^2-2)) dx = \int_{-1}^4 (3x-x^2+4) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \\
 &= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left( \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 = \\
 &= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20 \frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}
 \end{aligned}$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции  $y = y(t)$  и  $x = x(t)$  имеют непрерывные производные первого порядка

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1],$$

прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , где  $a = x(t_0)$ ,  $b = x(t_1)$ , и осью  $OX$ , вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t) dt \right|.$$

*Пример.* Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:  
 $x = 2 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

*Решение.* Для построения фигуры составим таблицу значений координат  $(x, y)$  точек кривой, с

t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
x	2	0	-2	0	2
y	0	3	0	-3	0

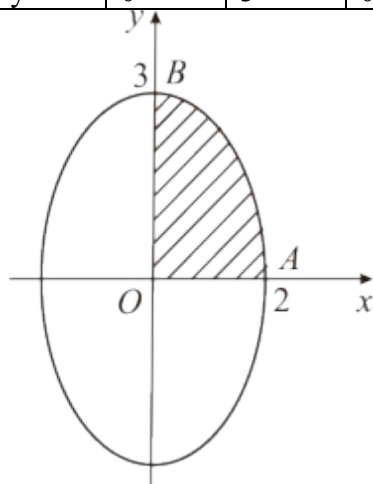


Рис. 3

Нанесем точки  $(x, y)$  на координатную плоскость  $XOY$  и соединим плавной линией. Когда параметр

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(известно, что — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  по осям  $OX$  и  $OY$ , найдем её площадь  $S$ , умножив на 4 площадь криволинейной трапеции  $AOB$ . Согласно формуле (

$$\begin{aligned}
S &= 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin t (2 \cos t)' dt \right| = 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right| = \left. \begin{array}{l} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2 \alpha \text{ из таблицы 2} \end{array} \right\} = \\
&= 4 \left| -6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4 \left| -3 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| = \\
&= 4 \left| -3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left( 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) \right| = 4 \left| -3 \frac{\pi}{2} \right| = 6\pi \approx 18,850 \text{ (кв. ед.)}.
\end{aligned}$$

Вычисление объемов тел

*Пример.* Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной линиями:  
*Решение.* Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис.

Чтобы получить объем тела вращения из объема  $V_1$  тела, полученного вращением фигуры

искомый объем  $V = V_1 - V_2$ . По формуле (12) найдем  $V_1$  и  $V_2$ :

$$V_1 = \pi \int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x \Big|_0^1 = 16\pi$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (-4x^3)^2 dx = 16\pi \int_0^1 x^6 dx = 16\pi \frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической

**Задание 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

- 1)  $y = x^2 - 2, y = 1 - 2x$
- 2)  $y = x^3, y = 8, x = 0$
- 3)  $y = 3x^2 + 1, y = 3x + 6$
- 4)  $y = x^2, y = x + 1$
- 5)  $y = x^2, y = 2 - x^2$
- 6)  $y = x^2 - 1, y = 1 - x$

**Задание 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

- 1)  $x = 2t - t^2, y = t(t - 1), 0 \leq t \leq 1$
- 2)  $x = t^2 - 1, y = t^3 - t, 0 \leq t \leq 1$
- 3)  $x = 2 \sin t, y = \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi$
- 4)  $x = \ln t, y = (t - 1)(3 - t), 1 \leq t \leq 3$
- 5)  $x = 1 - \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

6)  $x = \cos t, y = 1 - \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

**Задание 3.** Найти длину дуги кривой.

1)  $y = 1 + \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

2)  $x = t^2 - 1, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$

3)  $y = x^{\frac{2}{3}} + 1, 0 \leq x \leq 1$

4)  $x = t^2 - 1, y = \frac{t}{3} - t^3, 1 \leq t \leq 2$

5)  $y = x^{\frac{2}{3}}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

6)  $x = t^3 - 4, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$

**Задание 4.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $OX$  фигуры, ограниченной линиями

1)  $x^2 - y = 0, y = 1$

2)  $x^2 + y = 0, y = -1$

3)  $x - y^2 = 0, x = 1$

4)  $y = 4x^3, x = 0, y = -4$

5)  $y = 4x^3, x = 1, y = 0$

6)  $y = -4x^3, x = -1, y = 0$

## Раздел 10. Основы теории рядов

### Тема 10.1. Числовые ряды

#### Практическая работа №

#### Исследование числовых рядов на

Цель: 1) знать определение числового ряда, признаки сходимости ряда, приемы разложения функции

3) уметь решать прикладные задачи на определение сходимости ряда

#### Теоретические сведения

Бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  называется числовым рядом.  $u_n$  называется общим членом ряда. Запись ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (\*)

Частные суммы ряда:  $S_1 = u_1; S_2 = u_1 + u_2; S_3 = u_1 + u_2 + u_3; \dots$

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

Получилась последовательность:  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$

Если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  существует, то ряд называется сходящимся, а его сумма равна  $S$ .

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует, то ряд (\*) называется расходящимся.

Пример 1

Исследовать ряд на сходимость

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

Решение

Надо узнать существует ли предел суммы членов или нет.

Представим каждый член ряда в виде  $\frac{1}{2^{n-1}}$

Тогда сумму можно представить:

$$S_n = (1 - (-)^1) + (-)^2 + (-)^3 + \dots + (-)^{n-1} + (-)^n = 1 - (-)^n = 1 - (-1)^n$$

Следовательно ряд имеет предел и поэтому является сходящимся.

Необходимым условием сходимости ряда является  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Достаточные признаки сходимости ряда

– *Признак Даламбера*

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho$ ; если  $\rho > 1$  – ряд расходится;  $\rho < 1$  – ряд сходится;  $\rho = 1$  неопределен.

– *Признак Коши*

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \rho$ ; если  $\rho > 1$  – ряд расходится;  $\rho < 1$  – ряд сходится;  $\rho = 1$  неопределен.

– *Признак сравнения*: Если для рядов  $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$  и  $V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots$  существует конечный предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = K$ , где  $K > 0$  тогда оба ряда одновременно сходятся или

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = K$ , где  $K > 0$  тогда оба ряда одновременно сходятся или

расходятся. Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого заведомо сходящегося ряда.

превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого заведомо сходящегося ряда.

Пример 2

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Решение

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2} < 1$ , ряд сходится.

Пример 3

Исследовать ряд на сходимость

Решение

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$  Ряд расходится

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение числового ряда.
2. Каков необходимый признак сходимости числового ряда? Дайте его определение.
3. Сформулируйте достаточные признаки сходимости ряда.

### Содержание практической работы № 10

Исследуйте ряд на сходимость

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

### Тема 10.2. Функциональные ряды

#### Практическая работа № 10

#### Исследование функциональных рядов

Цель: 1) знать определение функционального ряда, признаки сходимости ряда

3) уметь решать прикладные задачи на определение сходимости ряда, выполнять разложение функции в ряд

#### Теоретические сведения

Числовой ряд  $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$  (\*) называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные члены, и знакопеременным, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

*Признак сходимости Лейбница для знакопеременного ряда.* Если члены знакопеременного ряда  $U_n$  по абсолютной величине убывают к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд (\*) сходится.

Знакопеременный ряд (\*) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $|U_1| + |U_2| + |U_3| + \dots$ . Абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Степенным рядом называется ряд вида

$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_n x^n + \dots$  (\*\*\*) , где числа  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_n$  называются коэффициентами ряда, а член  $x^n$  – степенями.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений  $x$ , при которых данный ряд  $|x| < R$  сходится и притом абсолютно, а при  $|x| > R$  ряд расходится. Радиус сходимости равен пределу  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ . Рядом Тейлора функции  $f(x)$  называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Если  $a=0$ , то получим частный случай ряда Тейлора, который называется рядом Маклорена.

Пример 3

Разложить функцию  $f(x) = \cos x$  в ряд Маклорена

$$f(0) = \cos 0 = 1; f'(x) = -\sin x; f'(0) = -\sin 0 = 0; f''(x) = -\cos x;$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1; f'''(x) = \sin x; f'''(0) = \sin 0 = 0; \dots$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$$

### Контрольные вопросы

1. Какой ряд называется знакопеременным? Знакопеременным?
2. Каковы признаки сходимости знакопеременного ряда?
3. Дайте определение степенного ряда.
4. Что называют областью сходимости степенного ряда?
5. При каком условии степенной ряд сходится?
6. Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.

## Содержание практической работы № 11

Разложите функцию в степенной ряд Маклорена

$$1) f(x) = \sin x \quad 2) f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 6x + 3$$

## Раздел 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения

### Тема 11.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия

#### Практическая работа № 11

#### Общее и частное решения дифференциальных уравнений

Цели:

- 1) знать определение дифференциальных уравнений, алгоритм решения дифференциальных уравнений
- 2) уметь решать прикладные задачи дифференциальные уравнения.

#### Теоретические сведения

Пример 1. Найти уравнение кривой, обладающей свойством, что угловым коэффициентом касательной к ней в каждой точке является  $\operatorname{tg} \alpha = 2x$ . Как известно, коэффициент прямой равен производной функции.  $y' = 2x$ ;  $dy = 2x \cdot dx$ . Найдем интеграл  $\int 2x dx = x^2 + C$ .

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную  $x$ , функцию  $y$  и ее производные. Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит только от  $x$ . Общее решение дифференциального уравнения  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Максимальный порядок входящих в уравнение производных называется порядком уравнения. Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество. Такое решение, в которое входят столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется общим решением. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:  $y' = f(x)g(y)$ ; а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$ .

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение  $\cos x - y' = 0$ .

$$\text{Запишем его в виде: } y' = \cos x; \quad dy = \cos x dx;$$

$$\int dy = \int \cos x dx;$$

Пример 3

Решить уравнение  $y^2 dy = x dx$ ;

$$\int y^2 dy = \int x dx;$$

Найдите общее решение дифференциального уравнения:

- 1)  $(1-x^2) + xy = 0$ ; 2)  $dy=dx$ ; 3)  $(1+y)dx - dy = 0$ ;  
4)  $y^2 dx = x^3 dy$

## Тема 11.2 Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

### Практическая работа № Решение уравнений первого порядка

Цели:

- 1) знать определение однородного дифференциального уравнения, алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений
- 2) уметь решать однородные дифференциальные уравнения

### Теоретические сведения

Дифференциальные уравнения позволяют решить многие прикладные задачи.

Пример 1

При планировании товарных запасов в днях целесообразно использовать уравнение  $udy = (b+ax)dx$ , где  $a=20$ ;  $b=40$ . Найти решение данного уравнения.

Решение.  $dy = (40 + 20x) dx$ ;

$$y = 40x + 20 \cdot \ln|x| + C$$

Многие дифференциальные уравнения, не являясь уравнениями с разделяющимися переменными, относятся к однородным уравнениям, общий вид которых  $y' = f(y/x)$ . (\*)

При решении таких уравнений делается замена переменной  $y$  по формуле  $y = ux$ , где  $u$  – новая переменная. Тогда  $dy = x du + u dx$ , а  $y' = x du/dx + u$ . Подставляя эти выражения в уравнение (\*) получим  $x du/dx + u = f(u)$ , т.е. уравнение  $x du/dx = f(u) - u$ .

Интегрирование дает  $\Phi(u) - \ln|x| = C$ , где  $\Phi(u)$  – одна из первообразных функции  $f(u) - u$ . заменяя  $u = y/x$  получим  $\Phi(y/x) - \ln|x| = C$ . Множество решений, даваемых этой формулой. Должно быть дополнено решениями  $y = 0$  и  $y = ux$ .

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение  $y' = (y^2 - x^2)/x$

Решение

Разделим и числитель и знаменатель на  $x^2$ :

$$y' = u, \text{ получим } x + u = \text{или}$$

$$x + u = \dots, \text{ или } x = -u; x = \dots$$

$$\ln|u| - \ln|x| = \ln C; y = (y^2 - x^2)C$$

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида  $y' = f(x)y + q(x)$ . Решение последнего уравнения может быть в виде  $y = F(x)u$ , где  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ . Тогда  $F(x)y' = f(x)F(x)y + F(x)q(x) + F'(x)y$ . Разделив на  $F(x)$  получим  $y' - f(x)y = q(x)$ . Линейное уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 2

Найти общее решение уравнения  $y' - y = (x+1)^2$

Решение

Это линейное уравнение: здесь  $f(x) = -q(x) = -(x+1)^2$

Положим  $y = uz$  и продифференцируем это равенство по  $x$ :

$$y' = u'z + uz'; \text{ подставим теперь выражения для } u \text{ и } z \text{ в данное уравнение, получим } u'z + uz' - u = (x+1)^2$$

$$\text{Или } u' + z(-u) = (x+1)^2 (*)$$

так как одну из вспомогательных функций или  $z$  можно выбрать произвольно, то в качестве  $z$  возьмем  $z = (x+1)^{-2}$ . Тогда  $z' = -2(x+1)^{-3}$ . Тогда  $u' - 2u = (x+1)^2 \cdot (x+1)^{-2} = 1$ . Тогда  $u' - 2u = 1$ . Тогда  $u = (x+1)^2$ . Подставим теперь выражение для  $u$  в уравнение (\*); тогда получим уравнение  $y = (x+1)^2$  отсюда находим  $y = (x+1)^2$

отсюда находим  $y = (x+1)^2$

$$z = \dots + C$$

Получаем общее решение

$$y = uz = \dots$$



$$Y = + C$$

Найти общее решение дифференциальных уравнений

- 1)  $+ =$  ; 2)  $- =$  ; 3)  $+ =$   
 4)  $(y-xy)dx + (x+xy)dy = 0$ ; 5)  $(xy-y)dx - (x-xy)dy = 0$   
 6)  $(y+ - (x$

### Тема 11.3 Уравнения высших порядков

**Цель:** приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка ус  
 Повторить и систематизировать знания по данной теме.

#### Теоретические сведения

Дифференциальное уравнение n-го порядка, имеющее вид  $y^{(n)} = f(x)$  решается последовательн  
 одна произвольная постоянная, а в окончательном результате – n произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее искомой функции, т.е. уравн

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

преобразуется в уравнению первого порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной т.

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy} \quad F\left(y, p, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

#### Контрольные вопросы

1. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Опишите обла  
 на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
2. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. Опишите обла  
 на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
3. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка в нормальной ф  
 переменных и условия на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
4. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной ф  
 переменных и условия на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
5. Дайте определение решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Опишит

#### Вариант 1.

1. Найти частные интегралы дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начал

a.  $y'' = \sin 3x; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{9}$

b.  $\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{-2x}; y(0) = \frac{7}{8}; y'(0) = \frac{1}{4}; y''(0) = \frac{1}{2}$

c.  $xy'' = 1; y(1) = 0, y'(1) = 2$

d.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos^2 x; y(0) = \frac{7}{8}; y'(0) = \frac{1}{4}; y''(0) = 1$

2. Из семейства интегральных кривых уравнения  $y'' = 3x^2 - 4x^3$  выделить кривую, проходящую ч
3. Ускорения прямолинейного движущейся материальной точки в зависимости от времени выра

начальный момент времени  $t = 0$ , скорость  $v=0,5$  м/с, а путь  $s=0$ .

4. Телль движется прямолинейно с ускорением  $a(t) = 12t^2 - 4$  (м/с<sup>2</sup>). Найти путь, пройденный телом.
5. В некоторый момент времени движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью  $v$  после включения тормоза, если сопротивление движению после начала торможения равно  $kv$ .

### Вариант 2.

1. Найти общие интегралы.

a.  $y'' = \sin 2x$

b.  $\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 5\varphi^4 - 2\varphi^3 + \varphi^2$

c.  $y'' = \ln x$

d.  $xy'' - y' = 0$

e.  $x^2 y'' + xy' = 1$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка  $2yy'^3 + y'' = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

3. В некоторый момент времени движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью  $v$  после включения тормоза, если сопротивление движению после начала торможения равно  $0,3v$ .

4. Из семейства интегральных кривых уравнения  $y'' = 3x^2 - 4x^3$  выделить кривую, проходящую через точку  $(1, 1)$  и касательную к ней в этой точке.

5. Ускорения прямолинейного движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается  $a(t) = 12t^2 - 4$ . Найти путь, пройденный телом в момент времени  $t = 0$ , скорость  $v=0,5$  м/с, а путь  $s=0$ .

## Тема 11.4 Линейные уравнения высших порядков

### Практическая работа №

### Решение линейных уравнений высших порядков

Линейное однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет следующий

вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

Пример 1

Найти частное решение дифференциального уравнения  $y''' - y' = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(2) = 1, y'(2) = 0, y''(2) = -1$

**Решение:** Составим и решим характеристическое уравнение:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$  — три различных действительных корня, поэтому общее решение:  $y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x$ , где  $C_1, C_2, C_3 - const$

Находим первую производную  $y'(x) = (C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x)' = -C_2 e^{-x} + C_3 e^x$  и применяем начальное условие  $y'(2) = 0$ :  $y'(2) = -C_2 e^{-2} + C_3 e^2 = 0$

$$y''(x) = (-C_2 e^{-x} + C_3 e^x)' = C_2 e^{-x} + C_3 e^x \quad y''(2) = -1 \quad y''(2) = C_2 e^{-2} + C_3 e^2 = -1$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^{-2} + C_3 e^2 = 1 \\ -C_2 e^{-2} + C_3 e^2 = 0 \\ C_2 e^{-2} + C_3 e^2 = -1 \end{cases}$$

Сложить почленно 2-е и 3-е уравнения, в результате чего получаем:

$$2C_3 e^2 = -1 \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{2e^2} = -\frac{1}{2} e^{-2}$$

— подставим по 2-е уравнение и

выразим  $C_2$ :  $-C_2 e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} \cdot e^2 = 0$

Почти всё готово. Подставим  $C_2 = -\frac{1}{2} e^2$  и  $C_3 = -\frac{1}{2} e^{-2}$  в 1-е уравнение системы:

$$C_1 - \frac{1}{2} e^2 \cdot e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} \cdot e^2 = 1$$

$$C_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow C_1 = 2$$

### Содержание практической работы

Найти частное решение дифференциального уравнения  $y''' + y'' = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

## **Перечень рекомендуемой литературы (в том числе Интернет-ресурсы)**

### **Основные источники:**

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А., Сабурова Т.Н. Элементы высшей математики / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 400 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 157 с.

### **Дополнительные источники:**

2. Богомолов Н.В. - Практические занятия по математике. – М.: ЮРАЙТ, 2017.

### **Интернет-ресурсы:**

6. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов  
<http://school-collection.edu.ru/collection/matematika>
7. Московский центр непрерывного математического образования  
<http://www.mccme.ru>
8. Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа  
<http://www.bymath.net>
9. Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября»  
<http://mat.1september.ru>
10. Задачи по геометрии: информационно-поисковая система <http://zadachi.mccme.ru>
6. Интернет-проект «Задачи» <http://www.problems.ru>
7. Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online)  
<http://www.mathtest.ru>