Государственное областное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«Усманский многопрофильный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине ЕН.02 Элементы математической логики

Программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)

по специальности: 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

по программе базовой подготовки

Усмань 2017

Методические рекомендации по организации и проведению практических работ по учебной дисциплине ЕН.02 Элементы математической логики по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Организация-разработчик: Государственное областное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Усманский многопрофильный колледж»

Разработчик: Нижегородова О.М., преподаватель математики

Рассмотрены и утверждены на заседании предметно-цикловой комиссии естественнонаучных дисциплин

Протокол № 6 от 30.06.2017 г.

Председатель предметно-цикловой комиссии естественнонаучных дисциплин ________________ Коровина Т.В.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по учебно-методической работе Думма Т.А.

Введение

Практические занятия, как вид учебных занятий, направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

В процессе практического занятия обучающиеся выполняют одно или несколько практических заданий в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Содержание практических занятий по учебной дисциплине ЕН.02 Элементы математической логики должно охватывать весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина, а в совокупности охватывать всю профессиональную деятельность, к которой готовится специалист.

При разработке содержания практических занятий следует учитывать, что наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Выполнение обучающимися практических занятий проводится с целью:

- формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки обучающихся, установленными ФГОС и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.02 Элементы математической логики по конкретным разделам и темам дисциплины;
- обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний;
- совершенствования умений применять полученные знания на практике, реализации единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развития интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработки таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива при решении поставленных задач при освоении общих и профессиональных компетенций.

Соответственно в процессе освоения учебной дисциплины ЕН.02 Элементы математической логики обучающиеся должны овладеть:

умениями:

- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;

знаниями:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
- формулы алгебры высказываний;
- методы минимизации алгебраических преобразований;
- основы языка и алгебры предикатов.

Выше перечисленные умения и знания направлены на формирование следующих профессиональных и общих компетенций студентов:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Собирать данные для анализа использования и функционирования информационной системы, участвовать в составлении отчетной документации, принимать участие в разработке проектной документации на модификацию информационной системы.

ПК 1.2. Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы.

ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

Данные методические указания по организации и проведению практических работ составлены в соответствии с содержанием рабочей программы дисциплины Элементы математической логики специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям) по программе углубленной подготовки.

Учебная дисциплина Элементы математической логики изучается в течение одного семестра. Общий объем времени, отведенный на выполнение практической работы по учебной дисциплине Элементы математической логики, составляет в соответствии с учебным планом и рабочей программой– 46 часов.

Методические рекомендации призваны помочь студентам правильно организовать работу и рационально использовать свое время при овладении содержанием учебной дисциплины Элементы математической логики, закреплении теоретических знаний и практических умений.

Распределение часов на выполнение практической работы студентов по разделам и темам учебной дисциплины Элементы математической логики

Наименование раздела, темы	Объем часов на ПР
Раздел 1. Алгебра высказываний.	**16**
Тема 1.1. Высказывания и операции над ними	**8**
Практическая работа №1. Определение значения истинности высказываний	2
Практическая работа №2. Построение составных высказываний	2
Практическая работа №3. Составление таблиц истинности для формул	2
Практическая работа №4. Преобразование логических выражений	2
Тема 1.2. Формулы алгебры высказываний	**4**
Практическая работа №5. Составление таблиц истинности для формул.	2
Практическая работа №6. Упрощение формул	2
Тема 1.3. Нормальные формы для формул алгебры высказываний.	**2**
Практическая работа №7. Приведение формул к совершенным нормальным формам	2

Тема 1.4. Приложения алгебры высказываний к логико-математической практике	**2**
Практическая работа №8. Применение необходимого и достаточного условии	2
Раздел 2. Булевы функции	**18**
Тема 2.1. Множества, отношения, функции	**8**
Практическая работа №9. Операции над множествами	2
Практическая работа №10. Круги Эйлера. Решение задач.	2
Практическая работа №11. Кортежи и декартовое произведение множеств	2
Практическая работа №12. Соотношения между множествами	2
Тема 2.2. Булевы функции от одного, двух аргументов и от n аргументов.	**10**
Практическая работа №13. Приведение Булевой функции к СДНФ	2
Практическая работа №14. Приведение Булевой функции к СКНФ	2
Практическая работа №15. Канонический многочлен Жегалкина	2
Практическая работа №16. Применение Теоремы Поста при решении задач	4
Раздел 3. Логика предикатов	**8**
Тема 3.1 Основные понятия, связанные с предикатами.	**2**
Практическая работа №17. Выполнение логических операции над предикатами	2
Тема 3.2. Кванторные операции над предикатами	**2**
Практическая работа №18. Кванторные операции	2
Тема 3.3. Применение логики предикатов к логико-математической практике	**4**
Практическая работа №19. Использование метода математической индукции при решении задач	2
Практическая работа №20. Применение логики предикатов	2
Раздел 4. Элементы теории алгоритмов	**4**
Тема 4. Элементы теории и практики кодирования	**4**
Практическая работа №21. Составление алгоритмов	2
Практическая работа №22. Различные подходы к формализации понятия алгоритма	2
Итого	**46**

Перечень рекомендуемой литературы
(в том числе Интернет-ресурсы)

Основные источники:

1. Игошин В.И. Элементы математической логики/ В.И. Игошин – М.: Академия. – 2016. – 314с.
2. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике/ В.И. Игошин – М.: Академия. – 2016. – 305с.

Дополнительные источники:

1. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 157 с.
2. Богомолов Н.В. - Практические занятия по математике. – М.: ЮРАЙТ, 2017.

Интернет-ресурсы:

1. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/collection/matematika
2. Московский центр непрерывного математического образования http://www.mccme.ru
3. Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа http://www.bymath.net
4. Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября» http://mat.1september.ru
5. Задачи по геометрии: информационно-поисковая система http://zadachi.mccme.ru
6. Интернет-проект «Задачи» http://www.problems.ru
7. Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online) http://www.mathtest.ru
8. Математическое образование: прошлое и настоящее. Интернет-библиотека по методике преподавания математики http://www.mathedu.ru
9. Портал Allmath.ru — Вся математика в одном месте http://www.allmath.ru
10. Прикладная математика: справочник математических формул, примеры и задачи с решениями http://www.pm298.ru

Раздел 1. Алгебра высказываний.
Тема 1.1. Высказывания и операции над ними.
Практическая работа №1. Определение значения истинности высказываний
Цель. Научиться определять значения логических функций.

Ход работы

1. Выполнить задания.
2. Ответить на контрольные вопросы.

Задания

1 вариант 2 вариант

Задание № 1. Какие из следующих выражений являются высказываниями:

а) 3>5; б) я живу в России; в) Y<0; г) 2*2=4?	а) учащиеся средней школы изучают математику; б) $y^2+a>0$ при $a>0$; в) 5*7=10; г) $(5+a^2)^2>0$?

Задание № 2. Какие из следующих импликаций истинны и почему:

а) если 2+2=4, то 3>2; б) если 2+2=5, то 2>3;	а) если 2+2=4, то 2>3 б) если 2+2=5, то 2<3.

Контрольные вопросы:

1. Что понимается под высказыванием?

Практическая работа №2. Построение составных высказываний
Цель. Научиться строить составные высказывания и определять их тождественность.

Ход работы

1. Выполнить задания.
2. Ответить на контрольные вопросы.

Задания

Задание № 1. Установить при помощи таблиц истинности является ли каждая из следующих функций тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

а) $((X_1 \to X_2) \wedge X_2) \to X_1$;	а) $X_1 \to (X_1 \wedge X_2)$;

б) $X_1 \wedge (X_1 \vee X_2)$;   б) $X_1 \to (X_2 \to X_1)$

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте определения тождественно истинной и тождественно ложной формулы

Практическая работа №3. Составление таблиц истинности для формул

Цель. Научиться определять значения логических функций и составлять таблицы истинности сложных функций.

Ход работы

3. Изучить основные сведения.
4. Выполнить задания.
5. Ответить на контрольные вопросы.

Основные сведения

1. Дизъюнкция. Если А и В – некоторые высказывания, то запись $A \vee B$ (А или В) определяет операцию дизъюнкции.
2. Конъюнкция. Если А и В – некоторые высказывания, то $A \wedge B$ (А и В) определяет операцию конъюнкции.
3. Отрицание (инверсия). Если А – некоторое высказывание, то А ($\neg A$) (не А) – высказывание противоположного смысла.
4. Импликация (следование). Если А и В – некоторые высказывания, то высказывание $A \to B$ (если А, то В) определяет операцию импликации.
5. Эквивалентность (равнозначность). Если А и В – некоторые высказывания, то $A \leftrightarrow B$ или $A \sim B$ (А тогда и только тогда, когда В) определяет операцию эквивалентности.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Задания

1 вариант **2 вариант**

Задание № 1. Составьте таблицу истинности для высказываний:

1 вариант:

а) $(A \leftrightarrow B) \to (A \vee C)$;

б) $A \to (B \wedge C)$;

в) $(x1 \oplus x2) \,\&\, x3 \vee x2$

г) $(X \to Y \,\&\, Z) \vee \overline{X}$

2 вариант:

а) $(A \leftrightarrow B) \to (B \vee C)$;

б) $(A \to B) \leftrightarrow (A \vee C)$.

в) $(x1 \downarrow x2) \downarrow (x2 \downarrow x3)$

г) $(x \to z) \leftrightarrow x \vee \overline{(y \,\&\, z)}$

Задание № 2.

Определите значение логического выражения **<u>не (X>Z)и не (X=Y)</u>**. если:

1 вариант:

а X = 3 Y=5 Z = 2

б X = 0 Y=1 Z = 19

2 вариант:

а X = 5 Y=0 Z = -8

б X = 9 Y= -9 Z = 9

Контрольные вопросы:

2. Какая логическая операция называется конъюнкцией?
3. Какая логическая операция называется дизъюнкцией?
4. Перечислите основные логические операции. Составьте для них таблицы истинности

Практическая работа №4. Преобразование логических выражений

Цель. Научиться преобразовать логические выражения.

.Ход работы

3. Выполнить задания.
4. Ответить на контрольные вопросы.

Задания

Задание № 1. Проверить справедливость равенств:

1. A~B = (A∨B)∧(A∨B)
2. A→B = A∨B
3. $(x \leftrightarrow y) \to z$ и $(\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \to z$
4. $1) X \vee (Y \& Z) = (X \vee Y) \& (X \vee Z);$ $2) A \& B \vee A \& \overline{B} = A$
5. $(x2 \& x3 + \bar{x}1) \& x1$ и $(x1 \downarrow x2) \& (x2 \downarrow x3)$

1. A∨B = A∧B
2. A→B = A∧B
3. $a) X \& (Y \vee Z) = (X \& Y) \vee (X \& Z)$ $b) \overline{X \vee Y} = \overline{X} \& \overline{Y}$
4. $a) X \vee (X \& Y) = X$ $b) X \& (X \vee Y) = Y$
5. $((a \oplus \overline{b}) \& c) \to a$ и $(b \leftrightarrow c \& a)$

Задание №2 Составьте таблицу истинности для функций

$(x \to y) \ \& \ \overline{(y \to x)}$

$(x1 \downarrow x2) \downarrow (x2 \downarrow x3)$

$(x \to z) \& x \vee (y \leftrightarrow z)$

$(x1 \oplus x2) \& x3 \vee x2$

$(x1 \downarrow x2) \vee (x2 \oplus x3)$

$\overline{(x1 \downarrow x2)} \downarrow (x2 \downarrow x3)$

Контрольные вопросы

1 Правила построения таблицы истинности

2 Какие формулы алгебры логики называются равносильными

Тема 1.2. Формулы алгебры высказываний

Практическая работа №5. Составление таблиц истинности для формул.

Цель. Научиться составлять таблицы истинности для формул.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Законы алгебры логики

I. Основные равносильности:

$x \wedge x \equiv x$ законы идемпотентности

$x \vee x \equiv x$

$x \wedge 1 \equiv x$

$x \vee 1 \equiv 1$

$x \wedge 0 \equiv 0$

$x \vee 0 \equiv x$

$x \wedge \bar{x} \equiv 0$

$x \vee \bar{x} \equiv 1$ - закон исключенного третьего

$\bar{\bar{x}} \equiv x$ - закон снятия двойного отрицания

$x \wedge (x \vee y) \equiv x$ законы поглощения

$$x \vee (x \wedge y) \equiv x$$

Задания

1. Пользуясь законами алгебры логики, упростить следующие логические выражения:

а) $\overline{\overline{A \wedge B} \vee (C \wedge B)}$

б) $B \to (A \to B)$;

в) $(A \to A) \to A$

2. Преобразовать формулы к виду, не содержащему символы $\to$ и $\leftrightarrow$:

а) $x \cdot (y \to z)$

б) $(A \to (B \to C)) \vee \overline{B \to A}$;

в) $\left(\overline{A \leftrightarrow \overline{B}}\right) \wedge C$

г) $\left(\overline{\overline{X} \to Y}\right) \wedge \left(\overline{\overline{X} \to Z}\right)$

Практическая работа №6. Упрощение формул.

Цель. Научиться преобразовывать логические выражения, используя законы алгебры логики.

Ход работы

1. Изучить основные сведения.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Законы алгебры логики

I. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$

$x \to y \equiv \overline{x} \vee y$

$x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$

$\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$ - законы де Моргана

$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$

$x \wedge y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

II. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

$x \wedge y \equiv y \wedge x$ - коммутативность конъюнкции

$x \vee y \equiv y \vee x$ - коммутативность дизъюнкции

$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ – законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции

$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$

$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ - законы дистрибутивности

$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Задания

1. Установить при помощи таблиц истинности является ли каждая из следующих формул тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

а) $\overline{A \vee (A \to B)}$;

б) $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Y \vee X)$;

в) $(A \cdot B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \cdot (B \vee C)$

Контрольные вопросы:

1. Какая логическая связка соответствует дизъюнкции?
2. Какая логическая связка соответствует эквивалентности?
3. Дайте определение понятию «Рассуждение»
4. Какие формулы называются равносильными?
5. Какие формулы называются тавтологиями? Приведите пример тавтологии.

Тема 1.3. Нормальные формы для формул алгебры высказываний.
Практическая работа №7. Приведение формул к совершенным нормальным формам
Цель: Научиться строить совершенную нормальную форму логической функции по таблице истинности или ее нормальной форме.

Ход работы

1. Выполнить задания, согласно варианта.
2. Ответить на контрольные вопросы

Задания

1. а) С помощью таблиц истинности проверьте, являются ли эквивалентными формулы А и В.
б) Для А построить СДНФ , для формулы В СКНФ по таблице истинности.

1 вариант

1) $A = \left(\overline{\overline{\overline{a}} \to b}\right) \vee c, \quad B = \left(\overline{a} \wedge \overline{b}\right) \vee c.$

2) $A = \left(\overline{a \to \overline{\overline{b}}}\right) \wedge c, \quad \mathrm{B} = a \wedge b \wedge c$

2 вариант

1) $A = (a \leftrightarrow b) \vee c, \qquad B = (a \to b) \vee (b \to a) \vee c$

2) $A = \left(\overline{a \to \overline{\overline{b}}}\right) \vee c, \qquad B = \left(a \to \overline{b}\right) \wedge \overline{c}.$

2. С помощью равносильных преобразований построить СДНФ формулы А:

1 вариант

$A \equiv \overline{x \leftrightarrow y} \wedge \overline{x}$

2 вариант

$A \equiv \left(\overline{x}\,\overline{z} \to xz\right) \vee x$

3. Построить СДНФ и СКНФ логической функции по таблице истинности:

1 вариант

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_1, x_1)$	0	0	1	1	0	1	0	1

2 вариант

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_1, x_1)$	0	1	1	0	1	1	0	0

Контрольные вопросы:

1 Что называется элементарной конъюнкцией?
2 Что называется конъюнктивной нормальной формой логической функции?
3 Как построить СДНФ? Опишите два способа.
4 Что означает символ «↔»?
5 Какое логическое действие называется дизъюнкцией?
6 Что называется элементарной дизъюнкцией?
7 Что называется конъюнктивной нормальной формой логической функции?
8 Что называется совершенной конъюнктивной нормальной формой логической функции?
9 Как построить СКНФ? Опишите оба способа.

Тема 1.4. Приложения алгебры высказываний к логико-математической практике
Практическая работа №8. Применение необходимого и достаточного условии
Цель: Научиться упрощать и минимизировать логические функции.

Ход работы

1. Выполнить задания.
2. Ответить на контрольные вопросы.

Задания

1. Для функций f_1, f_2, заданных таблицей истинности, найти МДНФ:

a) Методом Квайна,

b) Методом карт Карно

1 вариант:

X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f_2 (X_1, X_2, X_3)	0	1	0	1	0	0	1	1

2 вариант:

X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
X_2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
X_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f_1 (X_1, X_2, X_3, X_4)	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

X_1	0	0	0	0	1	1	1	1
X_2	0	0	1	1	0	0	1	1
X_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f_2 (X_1, X_2, X_3)	0	1	0	1	1	0	1	0

2. Упростить логические функции, используя законы алгебры логики

a) $(a \leftrightarrow b)a$

b) $\overline{(\overline{a \vee b} \rightarrow \bar{a} \vee b)a}$

3. Записать СКНФ функции при помощи добавления недостающего члена

a) $f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{z})$

b) $f(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee z)y$

c) $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{y} \vee z)$

4. По заданной логической функции построить логическую схему $F(x, y) = (y \wedge \bar{x}) \vee (\bar{y} \wedge x)$

Контрольные вопросы

1. В чем заключается операция "склеивания"?
2. В чем заключается операция "поглощения"?
3. Сколько СКНФ может иметь булева функция?
4. Какой процесс называется минимизацией булевых функций
5. Перечислите разновидности нормальных форм функций.

Раздел 2. Булевы функции
Тема 2.1. Множества, отношения, функции
Практическая работа №9. Операции над множествами

Цель: формирование умений задавать множества указанием характеристического свойства и перечислением элементов; выделять подмножества, устанавливать отношения между множествами, изображать их с помощью кругов Эйлера.

Вопросы к теме:

- Раскройте содержание понятия “множество”, “элемент множества”.
- Какие бывают множества?
- Назовите способы задания множеств.
- Какое множество называется подмножеством?
- Какие множества называются равными?
- Какие существуют отношения между множествами? Как каждое из отношений можно изобразить с помощью кругов Эйлера?

Задание 1: Объясните, почему множество X= {2,4,6} является подмножеством множества Y={1,2,3,4,5,6,7}. Изобразите множества X и Y с помощью кругов Эйлера.

Задание 2: Даны два множества: A={2,4,6} и B= {0,2,4,6,8}. Верно ли, что:
а) множества A и B пересекаются;
в) множество A является подмножеством множества B;
с) множество P={4,0,6.8,2} равно множеству B?

Задание 3: Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами:
а) C- множество двузначных чисел,
D={3, 43, 34, 56, 103};
в) C- множество двузначных чисел,
D- множество четных натуральных чисел;
с) C- множество двузначных чисел,
D- множество трехзначных чисел;
d) C- множество двузначных чисел,
D- множество натуральных чисел, не меньших 10.

Задание 4: A – множество выпуклых четырехугольников,
B - множество параллелограммов,
C- множество прямоугольников,
D- множество ромбов,
F- множество квадратов.
Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между множествами:
а) A и B,
в) B и C,
с) C и D,
d) C, D и F,
е) A, B, C, D и F.

Задание 5: Какое из данных множеств является подмножеством другого:
а) A- множество натуральных чисел, кратных 3,
B- множество натуральных чисел, кратных 6,
C- множество натуральных чисел, кратных 3.
в) A- множество треугольников,
B- множество прямоугольных треугольников,
C- множество остроугольных треугольников.

Задание 6: Установите, с какими теоретико-множественными понятиями встречаются учащиеся начальных классов, выполняя задания:
а) запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа;
б) из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся без остатка на 5;

в) из чисел 27, 45, 38, 62, 53, 72, 8, 48 выпиши те, которые при делении на 5 дают в остатке 3.
Задание 7: Изобразите отношение между множествами N, Z, Q и R с помощью кругов Эйлера.
Материал для самостоятельной работы:

1. Приведите примеры заданий из начального курса математики, при выполнении которых рассматриваются отношения между множествами.

2. Составьте классификационные схемы для объема понятий (не менее трех).

Контрольные вопросы

1. Известно, что элемент **а** содержится в множестве А и в множестве В. Следует ли отсюда, что: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A=B$?

2. Известно, что каждый элемент множества А содержится в множестве В. Следует ли отсюда, что: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A=B$?

3. Дано множество $A=\{2,4,6,8\}$. Образуйте все подмножества, содержащие два элемента.
этого, что $x \in A$? $x \in B$?

Практическая работа №10. Круги Эйлера. Решение задач.

Цель: - научить определять число элементов в объединении и разности конечных множеств,
- научить решать простейшие комбинаторные задачи.

Вопросы к теме:

1. Какими способами можно вычислить количество элементов в объединении конечных непересекающихся множеств?

2. Какими способами можно вычислить количество элементов в объединении конечных пересекающихся множеств?

3. Какими способами можно вычислить количество элементов в разности конечных множеств?

4. Какими способами можно вычислить количество элементов в декартовом произведении конечных множеств?

5. Сформулируйте правило суммы;

6.Сформулируйте правило произведения;

7. Запишите формулу для подсчета числа различных размещений из m по k элементов с повторениями;

8. Запишите формулу для подсчета числа сочетаний из m по k элементов без повторений;

9. Запишите формулу для подсчета числа перестановок из k элементов.

Задание 1: Из 50 учащихся 37 изучают английский язык, 17- немецкий, Сколько человек изучают оба языка?

Задание 2: В классе несколько мальчиков собирали марки. 15 человек собирали марки СССР, 11 человек иностранные марки, из них 6 человек собирали и марки СССР, и иностранные марки. Сколько мальчиков в классе собирали марки?

Задание 3: Из 32 школьников 12 занимаются в волейбольной секции, 15 – в баскетбольной, 8 занимаются и в той и в другой секции. Сколько школьников не занимаются ни в волейбольной, ни в баскетбольной секции?

Задание 4: Из 110 студентов английский язык изучают 44 человека, немецки50, французский 49, английский и немецкий- 13, английский и французский- 14, немецкий и французский- 12. Все три языка изучают 5 учащихся. Сколько студентов изучают только один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?

Задание 5: У девочки три ленты голубая, красная и белая. Девочка должна выбрать две ленты. Сколькими способами она может осуществить этот выбор.

Задание 6: У Алексея четыре шара: зеленый, желтый, красный и синий.

а) Сколькими способами он может выбрать три шара?

б) Сколькими способами он может выбрать два шара?

Задание 7: Набор составляется из книги и блокнота. Сколько различных наборов можно составить, если имеется 20 видов различных книг и 15 видов различных блокнотов?

Задание 8: Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1,2,3 и 4, если цифры в записи числа: 1) повторяются, 2) не повторяются?
Задание 9: Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 3, 4 и 0, если цифры в записи не повторяются?

Материал для самостоятельной работы:

1.Подобрать комбинаторные задачи, которые можно использовать в начальной школе для организации внеклассной работы по математике.

Контрольные вопросы

1.В группе 30 учащихся, из них 18 увлекается математикой, а 17 – русским языком. Каким может быть число учащихся, увлекающихся обоими предметами? Увлекающихся хотя бы одним предметом?
2. За границу выехала группа туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык, 83 – французский. Сколько туристов владело обоими иностранными языками?
3.В классе изучается 10 предметов. В понедельник 5 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?
4.Для ведения собрания из 36 человек надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Практическая работа №11. Кортежи и декартовое произведение множеств

Цель: научить устанавливать соответствия между множествами, находить соответствие обратное данному, строить графы и графики соответствия.

Вопросы к теме:

-сформулировать определение.
-записать его в схематическом виде,
- привести пример:
1.Определение соответствия.
2.Соответствие обратное данному.
3.Взаимно- однозначное соответствие.
4.Равномощные множества.
5.Функциональное соответствие.

Задание 1:Даны множества: X={2,5} и Y={3,6}. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какие из подмножеств задает соответствие: а) «меньше», б) «больше», в) «меньше на 1», г) « меньше в 3 раза»?
Задание2: Соответствие «число x в два раза больше числа y» рассматривается между множествами X и Y. Каким будет его график, если:
а) X={2,4,6,8}, Y=N;
б) X=[2,8], Y=R;
в) X= Y=R
Задание 3:Множества X={1,3,4,6} и Y={0,1} находятся в соответствии S={(1,1),(3,0),(3,1),(4,0),(4,1),(6,1)}.Задайте соответствие S^{-1} и постройте на одном чертеже их графики.
Задание 4:Между множеством X-углов треугольника ABC и множеством Y-его сторон задано соответствие T- «угол x лежит против стороны y». Задайте соответствие T^{-1}, обратное соответствию T, при помощи: а) предложения с двумя переменными; б) графа.
Задание 5:Задайте при помощи графа три соответствия между множествами X ={a,b,c} и Y={0,1,2}, так, чтобы одно из них было взаимно-однозначным.
Задание 6: X-множество прямоугольников, Y=N. Между элементами этих множеств установлено соответствие P:»прямоугольник x имеет площадь, равную y». Постройте граф соответствия P. Является ли оно взаимно-однозначным?
Задание 7:Докажите, что множество счетно, если:
а) A={9,10,11,12,……};

б) A={a\a=3n, n∈N};
с) A={a\a=n^2, n∈N}.

Практическая работа №12. Соотношения между множествами

Цель: формирование умений выполнять операции с множествами: объединение, пересечение, разность (дополнение), декартово произведение. Формирование умений строить график декартова произведения числовых множеств.

Теоретический материал

Обозначения:

- $A \cap B = \{x / x \in A$ и $x \in B\}$ (для записи определения пересечения множеств A и B);
- $A \cup B = \{x / x \in A$ или $x \in B\}$(для записи определения объединение множеств A и B);
- $A \setminus B = \{x / x \in A$ и $x \notin B\}$(для записи определения разности множеств A и B);
- B'_A – (для записи дополнения множества B до A);
- $A \times B = \{(x, y) / x \in A$ и $y \in B\}$(для записи определения декартова произведения множеств A и B).

в) Свойства операций:

- коммутативность пересечения и объединения

$(A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A,\ \forall A, B)$;

- ассоциативность пересечения и объединения

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\ \forall A, B, C$;

- дистрибутивность пересечения относительно объединения

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\ \forall A, B, C$;

- дистрибутивность объединения относительно пересечения

$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)\ \forall A, B, C$;

- дистрибутивность декартова произведения относительно объединения и вычитания $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)\ \forall A, B, C$;

Вопросы к теме:

-Сформулировать определение,

-записать его схематически,

-привести пример.

1. Определение подмножества.
2. Определение равных множеств
3. Определение пересечения множеств.
4. Определение объединения множеств
5. Определение разности множеств.
6. Определение дополнения множеств.
7. Определение декартова произведения множеств.

Задание 1:Даны множества A и B. Найти: A∩ B, A∪B, A/ B, B/ A,

а) A={a, b, c, d, e, f}, B={ b, e, f, к};

б) A={26, 39, 5, 58, 17, 81}, B={17, 26, 58};

в) A={26, 39, 5, 58, 17, 81}, B={17, 26, 58, 5, 39, 81}.

Задание 2: M - множество однозначных чисел, P – множество нечетных натуральных чисел. Найти:

M∩ P, M∪P, M/ P, P/ M.

Задание 3:Найти: N ∩ Z, Z ∩ Q, Q ∩ R, Q∩ I, N ∪ Z, Z ∪ Q, Q ∪R, Q ∪ I, R /Q, R / I.

Задание 4: Найти: A∩ B, A∪B, A/ B, B/ A,

а) A= [2; 6] и B= (-3; 4];

б) A= (-1; 6) и B= [-3; 8];

в) A= (-2; 2) и B= (3;6).

г) A= (3: ∞) и B= (-∞; 4].

Задание 5:Сформулируйте характеристические свойство элементов множеств

а) $A\cap B\cap C$, б) $A\cup B\cup C$, с) $A\cap B\cup C$,

д) $A\cup B\cap C$, е) $A/(B\cup C)$, ж) $A/B/C$,

если А-множество студентов педагогического колледжа, В- множество студентов группы 101, С-множество спортсменов в педагогическом колледже.

Задание 6: Докажите, что для любых множеств А,В и С справедливы равенства:

а) $A\cap(B/C)=(A\cap B)$ / $(A\cap C)$

б) $(A\cup B)/C=(A/C)\cup(B/C)$.

Материал для самостоятельной работы:

1. Приведите примеры заданий из начального курса математики, при выполнении которых используются операции с множествами.
2. Составьте структурно-логическую схему по теме «Множества и операции над ними».

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условия, при которых истинны следующие утверждения:

а) $5 \in A \cap B$; б) $7 \notin A \cap B$;

в) $5 \in A \cup B$; г) $7 \notin A\cup B$;

д) $5 \in A / B$; е) $7 \notin A / B$.

2. Известно, что $x\in A$. Следует ли из этого, что $x\in A \cap B$?
3. Известно, что $x\in A \cap B$.Следует ли из этого, что $x\in A$?
4. Известно, что $x\in A$. Следует ли из этого, что $x\in A \cup B$?
5. Известно, что $x\in A \cup B$.Следует ли из этого, что $x\in A$?

6 Известно, что $x\in A / B$. Следует ли из

Тема 2.2. Булевы функции от одного, двух аргументов и от n аргументов.

Практическая работа №13. Приведение Булевой функции к СДНФ

Цель: формирование умений составлять СДНФ..

X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Задание 1.

Составить СДНФ для булевой функции, заданной таблицей истинности.

Задание 2.

Составить СДНФ для булевой функции, заданной логической формулой: $F = (X \to Y) \equiv (X \to Z)$

Практическая работа №14. Приведение Булевой функции к СКНФ

Цель: формирование умений составлять СКНФ..

X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Задание 1.

Составить СКНФ для булевой функции, заданной таблицей истинности.

Задание 2.

Составить СКНФ для булевой функции, заданной логической формулой: $F = X\to(Y \equiv Z)$

Практическая работа №15. Канонический многочлен Жегалкина

Цель: овладение навыками представления булевых функций в виде полинома Жегалкина.

Теоретическая часть

Таблицы истинности булевых функций сростом числа аргументов становятся громоздкими и неудобными. Более удобный аналитический способ задания булевых функций основан на рассмотрении двузначной алгебры Поста, с операцией суперпозиции над множеством булевых функций.

Принцип суперпозиции

Определение 1 :**Функцию f, соответствующую формуле F, называют суперпозицией функции из множества функций, а процесс получения функции из множества функций будем называть операцией суперпозиции.**

Пример.

$F_1=(((x_1x_2)+x_1)+x_2)$ строится за три шага:

a) (x_1x_2)

b) $((x_1x_2)+x_1)$

c) $(((x_1x_2)+x_1)+x_2)=F_1$

x_1	x_2	x_1x_2	$(x_1x_2)+x_1$	$((x_1x_2)+x_1)+x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

При составлении сложных логических высказываний из простых используется принцип суперпозиции, т.е. подстановка в функцию вместо ее аргумента других функций. Вместо любой переменной используется как «собственно» независимая переменная, аргумент, так и переменная, являющаяся функцией других переменных. Принцип суперпозиции позволяет на основе трех основных элементарных функций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция) получать сложные логические высказывания, описывающие функционирование цифровых систем и автоматов.

Определение 2: Система булевых функций{f1,…,fm}называется **полной**, если любая булева функция может быть выражена через функции f1,…,fm с помощью суперпозиций (т.е. составления сложных функций).

Утверждение 1: Пусть даны две системы функций:

$A=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ (1)

$B=\{g_1,g_2,\ldots,g_m\}$ (2)

относительно которых известно, что система (1) полная и каждая ее функция выражается с помощью суперпозиции через функции системы (2). Тогда система (2) также является полной.

Многочлен Жегалкина.

Одной из интересных систем является набор Жегалкина (⊕, •, 1)

В алгебре логики теорема Жегалкина играет важную роль.

Определение 3: Любая переключательная функция f может быть представлена при помощи полинома по «mod 2» (полинома Жегалкина).

Полином Жегалкина – канонический многочлен.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=k_0+k_1x_1+k_2x_2+k_3x_1x_2+\ldots+k_nx_1x_2\ldots x_n$,

где $k_1\ldots k_s$ – коэффициенты, которые принимают значения 0 или 1.

Пример.

Выразить x_1+x_2 в виде композиции полиномов Жегалкина.

Ищем выражение для x_1+x_2 в виде полинома с неопределенными коэффициентами:

$x_1+x_2=ax_1x_2+bx_1+cx_2+d$,

при $x_1=x_2=0$ имеем $0=d$;

при $x_1=0$, $x_2=1$ имеем $1=c$;

при $x_1=1$, $x_2=0$ имеем $1=b$;
при $x_1=x_2=1$ имеем $1=a+b+c$.
Тогда окончательно:
$x_1+x_2=x_1x_2+x_1+x_2$.
Каждая булева функция может быть представлена многочленом Жегалкина.

Поскольку число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n} и число различных многочленов Жегалкина от n переменных также равно 2^{2^n}, то представление булевой функции многочленом Жегалкина единственно.
Утверждение 1 дает лишь достаточное условие полноты системы булевых функций.
Перейдем теперь к установлению критерия полноты системы булевых функций.
Определение 4: Множество (класс) К булевых функций называется функционально замкнутым, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.
Определение 5: Булева функция называется **линейной**, если она может быть представлена полиномом первой степени, т.е. записана в виде
$f(x_1,\ldots,x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\ldots\oplus a_nx_n$, где $a_0,a_1,\ldots a_n$ - коэффициенты 0 или 1.
Например, отрицание и сумма (по mod 2) линейны, а конъюнкция и дизъюнкция нелинейны.
Количество линейных функций 2^{n+1}.
Определение 6: Функция, удовлетворяющая условию $f(0,\ldots,0)=0$, называется **функцией сохраняющей 0** или константой нуля. Например, сохраняют константу 0 дизъюнкция и конъюнкция, а отрицание и импликация не сохраняют ее.
Определение 7: Функция, удовлетворяющая условию $f(1,\ldots,1)=1$, называется функцией сохраняющей 1. Например, сохраняют константу 1 дизъюнкция и конъюнкция, а отрицание и сумма (по mod 2) не сохраняют ее.
Определение 8:
Пусть $f(x_1,\ldots, x_n)$ - булева функция. Функция $f^*(x_1,\ldots, x_n)$ называется **двойственной** $f(x_1,\ldots, x_n)$, если $f^*(x_1,\ldots, x_n)=\bar{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$. Например, двойственной $x_1\vee x_2$ является функция $x_1\&x_2$ и наоборот.
Определение 9: Функция $f(x_1,\ldots, x_n)$ называется **самодвойственной**, если $f(x_1,\ldots, x_n)=\bar{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$, т.е. самодвойственная функция f на противоположных наборах принимает противоположные значения. Примерами самодвойственной функции является отрицание (все остальные функции не самодвойственны).
Определение 10: Булева функция называется **монотонной**, если при любом возрастании набора значения этой функции не убывают.
Монотонны, например, дизъюнкция, конъюнкция, тогда как отрицание и сумма (по mod 2) немонотонны.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте принцип суперпозиции.
2. Сколько имеется линейных функций от n переменных?
3. Какие функции называются самодвойственными?
4. Какие функции называются монотонными? Перечислить все монотонные функции от двух переменных.

Задание

1. Выразить с помощью суперпозиции:
1) $\to$ через $1,\oplus,\&$;
2) $\&,\vee$ через $\to$, $\bar{\ }$;
3) $\bar{\ }$ через $0, \to$;
4) $\bar{\ }$, $\vee$, $\&$ через $|$ (штрих Шеффера $x|y=\bar{x}\&\bar{y}$);
5) $\bar{\ }$, $\vee$, $\&$ через $\downarrow$(стрелка Пирса $x\downarrow y=\bar{x}\vee\bar{y}$);
6) $\to$ через $\bar{\ }$ и $\sim$;

7) $\bar{}$ через $\rightarrow$.

2. Представить многочленом Жегалкина :
1) $X \rightarrow Y$;
2) $X \sim Y$.

Практическая работа №16. Применение Теоремы Поста при решении задач
Цель: изучение свойств функционально полных систем.

Теоретическая часть

Теорема Поста: Система функционально **полна** тогда и только тогда, когда содержит:
1) хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 0;
2) хотя бы одну функцию, не сохраняющую константу 1;
3) хотя бы одну нелинейную функцию;
4) хотя бы одну немонотонную функцию;
5) хотя бы одну несамодвойственную функцию.

Если каждая из взятых функций не обладает лишь одним свойством (но каждая другим), то для функциональной полноты необходима система из 5-ти функций.

Полная система называется *несократимой*, если исключение любой функции системы нарушает ее полноту. В связи с тем, что каждая из функций не обладает несколькими свойствами, функционально полные системы могут быть построены с помощью одной, двух, трех и четырех функций. Наиболее распространенная система – система из трех функций: И, ИЛИ, НЕ. С помощью этих функций могут быть описаны процессы управления любыми производствами.

Задания:

1. Доказать, что число сомодвойственных функцийц от n переменных равно $2^{2^{m-1}}$
2. Определите, будет ли функция самодвойственной:
1) f(x1,x2,x3)=x1+x2&x3
2) f(x1,x2,x4)=(x1&x3)+x2
3) f(x1,x2,x3)=x3&(x1&x2)
3. Какие функции являются монотонными и почему:
1) f(x1)=x1;
2) f(x1,x2)=x1&x2;
3) f(x1,x2)=x1+x2;
4) f(x1,x2)=x1~x2.

Раздел 3. Логика предикатов
Тема 3.1 Основные понятия, связанные с предикатами.
Практическая работа №17. Выполнение логических операции над предикатами
Цель: научиться выполнять логические операции над предикатами.
Ход выполнения работы:
1. Изучить теоретический материал.
2. Получить задание у преподавателя.
3. Выполнить задание.
4. Ответить на контрольные вопросы.
5. Защитить выполненное задание.

Краткие теоретические сведения

n-местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$ – предложение, содержащее *n* переменных , и превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно.

Множество истинности предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ – совокупность всех упорядоченных n-систем ($a_1, a_2, \ldots, a_n$), в которых $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при подстановке $x_i = a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.
Это множество будем обозначать P^+. Таким образом,

$$P^+ = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \lambda(P(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = 1\}$$

Множество P^+ истинности n-местного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собой n-арное отношение между элементами множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$.
Если предикат $P(x)$ – одноместный, заданный над множеством M, то его множество истинности P^+ является подмножеством множества M (P^+ Í M).
Образец выполнения

1. Найти множество истинности предиката $T(x)$, полученного в результате указанной логической операции над предикатами $R(x)$ и $S(x)$. Предикаты рассматриваются на множестве $M = \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$

$T(x) = R(x) \wedge S(x)$, $R(x)$: "$|x+5| < 10$", $S(x)$: "$x^2 + 1 < 10$"
Решение

Множество истинности предиката R(x) имеет вид $R^+ = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
Множество истинности предиката S(x) имеет вид $S^+ = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
Предикат T получен в результате конъюнкции предикатов R и S, поэтому его множество истинности является пересечением множеств истинности предикатов R и S. Отсюда

T = {–2, –1, 0, 1, 2}
Задания.

1. Найти множество истинности предиката $T(x)$, полученного в результате указанной логической операции над предикатами $R(x)$ и $S(x)$. Предикаты рассматриваются на множестве $M = \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$

1) $T(x) = R(x) \vee S(x)$, $R(x)$: "$|x-2| < 5$", $S(x)$: "$x^2 - 1 < 8$"
2) $T(x) = R(x) \rightarrow S(x)$, $R(x)$: "$|2x+1| \geq 2$", $S(x)$: "$2x^2 + 5 < 8$"
3) $T(x) = R(x) \leftrightarrow S(x)$, $R(x)$: "$|5x+6| < 2$", $S(x)$: "$x^2 + 7 < 25$"
4) $T(x) = R(x) \wedge S(x)$, $R(x)$: "$|4x-3| \leq 9$", $S(x)$: "$5x^2 + 3 < 12$"
5) $T(x) = R(x) \vee S(x)$, $R(x)$: "$|5x+3| \geq 8$", $S(x)$: "$3x^2 + 5 < 20$"
6) $T(x) = R(x) \rightarrow S(x)$, $R(x)$: "$|x-4| < 9$", $S(x)$: "$4x^2 - 9 < 40$"
7) $T(x) = R(x) \leftrightarrow S(x)$, $R(x)$: "$|2x-5| < 6$", $S(x)$: "$5x^2 - 4 < 60$"
8) $T(x) = R(x) \wedge S(x)$, $R(x)$: "$|7x-4| < 11$", $S(x)$: "$6x^2 - 20 < 25$"

9) $T(x) = R(x) \vee S(x)$, $R(x)$: "$|8x + 9| < 15$", $S(x)$: "$7x^2 - 10 < 10$"

Тема 3.2. Кванторные операции над предикатами

Практическая работа №18. Кванторные операции

Цель: научиться выполнять логические операции с кванторами

Теоретический материал.

Пусть имеется предикат P(x), определенный на множестве М. Если *a* - некоторый элемент из множества М, то подстановка его вместо x в предикат P(x) превращает этот предикат в высказывание - P(a). Такое высказывание называется единичным. Наряду с образованием из предикатов единичных высказываний в логике предикатов рассматривается еще две операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание.

Квантор всеобщности. *Пусть P(x) — предикат, определенный на множестве М. Под выражением ∀x P(x) понимают высказывание, истинное, когда P(x) истинно для каждого элемента x из множества М и ложное, в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x.*

Соответствующее ему словесное выражение будет: «Для всякого x P(x) истинно». Символ ∀ называют квантором всеобщности.

Переменную *x* в предикате *P(x)* называют *свободной* (ей можно придавать различные значения из М), в высказывании *∀x P(x)* переменную *x* называют *связанной* квантором ∀.

Квантор существования. *Пусть P(x) — предикат, определенный на множестве М. Под выражением ∃x P(x) понимают высказывание, которое является истинным, если существует элемент x ∈ М, для которого P(x) истинно, и ложным в противном случае. Это высказывание уже не зависит от x.*

Соответствующее ему словесное выражение будет: «Существует x, при котором P(x) истинно». Символ ∃ называют квантором существования. В высказывании ∃x P(x) переменная x связана квантором ∃.

Приведем пример употребления кванторов. Пусть на множестве N натуральных чисел задан предикат P(x): «Число x кратно 5». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: ∀x∈ N P(x) - «Все натуральные числа кратны 5»; ∃x∈N P(x) — «Существует натуральное число, кратное 5». Очевидно, первое из этих высказываний ложно, а второе истинно. Ясно, что высказывание ∀ x P(x) истинно только в том единственном случае, когда P(x) - тождественно истинный предикат, а высказывание ∃x P(x) ложно только в том единственном случае, когда P(x) — тождественно ложный предикат.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Пусть, например, на множестве М задан двухместный предикат P(x,y). Применение кванторной операции к предикату P(x,y) по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату P(x,y) одноместный предикат ∀x P(x, y} (или одноместный предикат ∃x P(x, y)), зависящий от переменной y и не зависящий от переменной x. К ним можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут уже к высказываниям следующих видов:

∀y∀xP(x,y), ∃y∀xP(x,y), ∀y∃xP(x,y), ∃y∃xP(x,y).

Например, рассмотрим предикат P(x, y): « x кратно y », определенный на множестве N. Применение кванторных операций к предикату P(x,y) приводит к восьми возможным высказываниям:

1. ∀y∀xP(x,y) - «Для всякого *y* и для всякого x *y* является делителем x».
2. ∃y∀xP(x,y) - «Существует *y,* которое является делителем всякого *x».*
3. ∀y∃xP(x,y)- «Для всякого *y* существует *x* такое, что *x* делится на y».
4. ∃y∃xP(x,y) - «Существует *y* и существует *x* такие, что *y* является делителем x».
5. ∀x∀yP(x,y) - «Для всякого *x* и для всякого *y y* является делителем *x».*
6. ∀x∃yP(x,y) - «Для всякого *x* существует такое y, что *x* делится на y».
7. ∃x∃yP(x,y) - «Существует *x* и существует *y* такие, что *y* является делителем x».
8. ∃x∀yP(x,y) - «Существует *x* такое, что для всякого *y x* делится на y».

Высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 7 истинны.

Задание Какие из следующих высказываний тождественно ложные , а какие тождественно истинные, если область определения M = R?

а) $\exists x\ (x + 5 = x + 3)$ – тождественно ложное высказывание, т.к. ни при каком x равенство неверно;

б) $\forall x\ (x^2 + x + 1 > 0)$ – тождественно истинное высказывание: левую часть неравенства перепишем в виде $(x + ½)^2 + ¾$, эта сумма больше нуля при любом x;

в) $\exists x\ ((x^2 - 5x + 6 \geq 0)(x^2 - 2x + 1 > 0))$ – высказывание тождественно истинное, если пересечение областей истинности логически умножаемых предикатов не пусто, и ложное, в противном случае.

Тема 3.3. Применение логики предикатов к логико-математической практике

Практическая работа №19. Использование метода математической индукции при решении задач

Цель: проведение доказательства методом полной математической индукции.

Алгоритм действий:

Пример 1. Доказать, что сумма первых *n* ($n \in N$) нечетных чисел равна квадрату их числа, т. е. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Решение. Т. к. утверждение зависит от натурального параметра *n*, то воспользуемся для его доказательства методом математической индукции.

1) Проверим справедливость данного утверждения для $n = 1$,
если $n = 1$, то $1 = 1^2$;

2) предположим, что сумма первых *k* ($k \geq 1$) нечетных чисел равна квадрату числа этих чисел, т. е. $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$. Другими словами, предположим, что наше утверждение истинно для всех, значит *n* от 2 до *k* включительно;

3) установим, исходя из равенства (2), что сумма первых *k* +1 нечетных чисел равна $(k+1)^2$, т. е.

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = (k+1)^2$. Действительно,
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k + 1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$; $(k+1)^2 = (k+1)^2$ (истина).

На основании принципа математической индукции делаем вывод, что сумма первых *n* нечетных чисел равна n^2 для любого натурального *n*.

Пример 2. Доказать, что для *n*-го члена геометрической прогрессии { b_n } со знаменателем *q* справедлива формула $b_n = b_1 q^{n-1} (n \in N)$.

Решение. Доказательство проводим методом математической индукции по натуральному параметру *n*.

1) $n = 1 \Rightarrow b_1 = b_1 q^{1-1} \Rightarrow b_1 = b_1$ (истина);

2) Предположим, что формула справедлива для всех натуральных значений *n* от 2 до *k* включительно, т. е. $b_k = b_1 q^{k-1}$

3) $n = k + 1 \Rightarrow b_{k+1} = q \cdot b_k = q b_1 q^{k-1} = b_1 q^k$, $b_{k+1} = b_1 q^{(k+1)-1}$ (истина)

Согласно принципу математической индукции, можно сказать, что рассматриваемая формула верна для любого натурального *n*.

Пример 3. Доказать, что при каждом натуральном *n* число $n^3 + 11n$ делится на 6.

Решение. Обозначим число $n^3+11n=a_n$. Надо доказать, что a_n делится на 6 при любом натуральном *n*:

1) $n=1 \Rightarrow a_1=1^3+11\cdot 1=12:6$ (истина);

2) $n=k \Rightarrow a_k=k^3+11k:6$ (предположение);

3)

$$n=k+1 \Rightarrow a_{k+1}=(k+1)^3+11(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+11k+11=$$

$$=k^3+3k^2+3k+14k+12=\left(k^3+11k\right)+\left(3k^2+3k+12\right)$$

$\left(k^3+11k\right):6$ (по предположению),

$\left(3k^2+3k+12\right):3.$

Если мы сумеем доказать, что $\left(3k^2+3k+12\right):2.$, то тогда можем утверждать, что $\left(3k^2+3k+12\right):6$, т. е.3 и 2 взаимопростые числа.

Это доказательство проведем также методом математической индукции:

1. $k=1 \Rightarrow 3\cdot 1^2+3\cdot 1+12=18:2$;

2. $k=s \Rightarrow 3s^2+12:2$ (предположение);

3) $k=s+1 \Rightarrow 3(s+1)^2+3(s+1)+12=3s^2+6s+3+3s+3+12=$

$$=\left(3s^2+3s+12\right)+(6s+6);$$

$\left(3s^2+3s+12\right):2$ (по предположению);

$(6s+6):2$ (по свойствам делимости).

Тогда $\left(3s^2+3s+12\right)+(6s+6):2$ (по свойству делимости).

Итак, $\left(3k^2+3k+12\right):3$ и 2. Следовательно, $\left(3k^2+3k+12\right):6$.

Согласно методу математической индукции, мы можем сказать, что число n^3+11n делится на 6 для любого натурального значения *n*.

Пример 4. Доказать, что при каждом натуральном *n* справедлива формула

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение:

1) $n=1 \Rightarrow 1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$; 1 = 1(истина);

2) $n=k \Rightarrow 1+2+3+\ldots+(k-1)+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ (предположение).

3) $n = k+1 \Rightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = A$, $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2} = B$.

Чтобы доказать, что $A = B$, мы можем

1. с помощью тождественных преобразований перевести A в B;
2. с помощью тождественных преобразований перевести B в A;
3. с помощью тождественных преобразований перевести A в C;
4. с помощью тождественных преобразований перевести B в C;

Воспользуемся приемом (3)

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2},$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+2k+k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}\ ;\ \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$ (и).

Согласно принципу математической индукции, делаем вывод:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$ при $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

Задание

Доказать, что при каждом натуральном n число an делится на b, если:

1) $a_n = 5^{k+3} + 11^{3k+1}$, $b = 17$;
2) $a_n = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$, $b = 133$;
3) $a_n = 7^{2k} - 4^{2k}$, $b = 33$;
4) $a_n = 6^{2k} + 3^{k+2} + 3^n$, $b = 11$;
5) $a_n = 6^{2k} + 19^n - 2^{n+1}$, $b= 17$;
6) $a_n = 7\cdot 5^{2k} + 12\cdot 6^n$, $b = 19$;
7) $a_n = 5^{2n+1} + 3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$, $b = 19$;
8) $a_n = 9^{n+1} - 18n - 9$, $b = 18$;
9) $a_n = 5^{2+n} + 26\cdot 5^n + 8^{2n+1}$, $b = 59$;
10) $a_n = 10^n + 18n - 28$, $b = 27$.

Практическая работа №20. Применение логики предикатов

Цель: исчисление предикатов, выполнение операций над предикатами.

Теоретические сведения

В логике предикатов будем пользоваться следующей символикой:

1. Символы $p, q, r, \ldots$ — переменные высказывания, принимающие два значения: 1 - истина, 0 — ложь.
2. Предметные переменные - $x, y, z, \ldots$. которые пробегают значения из некоторого множества M; $x°, y°, z°, \ldots$ -предметные константы, то есть значения предметных переменных.
1. $P(\cdot), F(\cdot)$ - одноместные предикатные переменные; $Q(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot), R(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$ n-местные

предикатные переменные. $P^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot , \cdot , ...,\cdot)$ - символы постоянных предикатов.
2. Символы логических операций: $\wedge$, v, $\rightarrow$,- .
3. Символы кванторных операций: $\forall x$, $\exists x$.
4. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение формулы логики предикатов:
1. Каждое высказывание как переменное, так и постоянное, является формулой (элементарной).
2. Если F(·,·,...,·) – n- местная предикатная переменная или постоянный предикат, а x_1, x_2, …, x_n - предметные переменные или предметные постоянные (не обязательно все различные), то $F(x_1, x_2, …, x_n)$ есть формула. Такая формула называется элементарной, в ней предметные переменные являются свободными, не связанными кванторами.
3. Если A и B — формулы, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой - свободной, то слова A v B , A& B, $A \rightarrow B$ есть формулы. В этих формулах те переменные, которые в исходных формулах были свободными, являются свободными, а те, которые были связанными, являются связанными.
4. Если A - формула, то $\overline{A}$ - формула, и характер предметных переменных при переходе от формулы A к формуле $\overline{A}$ не меняется.
5. Если A(x) - формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то слова $\forall$xA(x) и $\exists$xA(x) являются формулами, причем предметная переменная входит в них связанно.
6. Всякое слово, отличное от тех, которые названы формулами в пунктах 1-5, не является формулой.

Например, если P(x) и Q(x, y) - одноместный и двухместный предикаты, а q, r - переменные высказывания, то формулами будут слова: q, P(x), P(x)Q(x°,y),
$\forall$xP(x)$\rightarrow$ $\exists$xQ(x, y), $(\overline{Q(x,y)} \vee q) \rightarrow r$.
Не является формулой слово: $\forall$xQ(x, y) $\rightarrow$ P(x). Здесь нарушено условие п.3, так как в формулу$\forall$xQ(x, y) переменная x входит связано, а в формулу P(x) переменная x входит свободно.
Выражение $\forall$y($\exists$yP(x,y))VQ(x) не является формулой, т.к. квантор всеобщности на y навешан на формулу $\exists$yP(x,y), в которой переменная y уже связана квантором существования.
Выражение $\forall$y, xP(x, y) не является формулой, т.к. переменной x не присвоен квантор.
Из определения формулы логики предикатов ясно, *что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов.*

Задание Какие из следующих выражений являются формулами? В каждой формуле выделить свободные и связанные переменные:

1) $\exists x \, \exists y \, P(x,y)$;
2) $\exists x, y \, P(x,y)$;
3) $\forall x \, P(x) \vee \forall y \, Q(x,y)$;
4) $\forall x \, \exists y \, P(x,y)$;
5) $p \rightarrow \forall x \, P(x,y)$;
6) $\exists x \, P(x,y) \& Q(y,z)$.

Раздел 4. Элементы теории алгоритмов
Тема 4. Элементы теории и практики кодирования.
Практическая работа №21. Составление алгоритмов.
Цель: Закрепление общего понятия «алгоритм». Решение простейших алгоритмических задач

Задание 1. Определить площадь трапеции по введенным значениям оснований (a и b) и высоты (h).
Задание 2. Определить среднее арифметическое двух чисел, если a положительное и частное (a/b) в противном случае.

Задание 3. Составить алгоритм нахождения суммы целых чисел в диапазоне от 1 до 10.

Практическая работа №22. Различные подходы к формализации понятия алгоритма.
Цель: Получение практических навыков в работе с графической формой представления алгоритма

1. Линейный алгоритм, выполненный в практической работе №1, переделать на циклический с заданным количеством циклов по примеру 4.
2. Найти сумму значений переменной Р, полагая, что начальное значение этой переменной равно нулю , т.е. Р=0. В каждом цикле переменная изменяется на 2, т.е. Р=Р+2. Количество циклов равно 5. В результате данного алгоритма значение переменной будет равна Р=10.
3. Пусть заданы начальные значения переменных:

x:=1; y:=5.
Начало цикла;
пока y>x
y: = y – x;
конец цикла.
Определить количество циклов и значения переменных x, y после выхода из цикла.