Государственное областное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«Усманский многопрофильный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики

Программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)

по специальности: 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

по программе базовой подготовки

Усмань 2017

Методические рекомендации по организации и проведению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Организация-разработчик: Государственное областное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Усманский многопрофильный колледж»

Разработчик: Нижегородова О.М., преподаватель математики

Рассмотрены и утверждены на заседании предметно-цикловой комиссии естественнонаучных дисциплин

Протокол № 6 от 30.06.2017 г.

Председатель предметно-цикловой комиссии естественнонаучных дисциплин ____________________ Коровина Т.В.

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора Думма Т.А.

по учебно-методической работе

Введение

Практические занятия, как вид учебных занятий, направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных и профессиональных практических умений и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.

В процессе практического занятия обучающиеся выполняют одно или несколько практических заданий в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Содержание практических занятий по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики должно охватывать весь круг профессиональных умений, на подготовку к которым ориентирована данная дисциплина, а в совокупности охватывать всю профессиональную деятельность, к которой готовится специалист.

При разработке содержания практических занятий следует учитывать, что наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике, развиваются интеллектуальные умения.

Выполнение обучающимися практических занятий проводится с целью:

- формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки обучающихся, установленными ФГОС и рабочей программой учебной дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики по конкретным разделам и темам дисциплины;
- обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний;
- совершенствования умений применять полученные знания на практике, реализации единства интеллектуальной и практической деятельности;
- развития интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;
- выработки таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива при решении поставленных задач при освоении общих и профессиональных компетенций.

Соответственно в процессе освоения учебной дисциплины ЕН.02 Элементы высшей математики обучающиеся должны овладеть:

умениями:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения;

знаниями:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Выше перечисленные умения и знания направлены на формирование следующих профессиональных и общих компетенций студентов:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Собирать данные для анализа использования и функционирования информационной системы, участвовать в составлении отчетной документации, принимать участие в разработке проектной документации на модификацию информационной системы.

ПК 1.2. Взаимодействовать со специалистами смежного профиля при разработке методов, средств и технологий применения объектов профессиональной деятельности.

ПК 1.4. Участвовать в экспериментальном тестировании информационной системы на этапе опытной эксплуатации, фиксировать выявленные ошибки кодирования в разрабатываемых модулях информационной системы.

ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

Данные методические рекомендации по организации и проведению практических работ составлены в соответствии с содержанием рабочей программы дисциплины Элементы высшей математики специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям) по программе углубленной подготовки.

Учебная дисциплина Элементы высшей математики изучается в течение одного семестра. Общий объем времени, отведенный на выполнение практической работы по учебной дисциплине Элементы высшей математики, составляет в соответствии с учебным планом и рабочей программой– 70 часов.

Методические рекомендации призваны помочь студентам правильно организовать работу и рационально использовать свое время при овладении содержанием учебной дисциплины Элементы высшей математики, закреплении теоретических знаний и практических умений**.**

Распределение часов на выполнение практической работы студентов по разделам и темам учебной дисциплины Элементы высшей математики

Наименование раздела, темы	Количество часов на ПР
Раздел 1.Элементы теории множеств.	**4**
Тема 1.2 Числовые множества. Практическая работа №1.Решение упражнений с использованием теории множеств.	4
Раздел 2. Элементы линейной алгебры	**6**
Тема 2.1. Матрицы и определители Практическая работа № 2. Вычисление определителей	2
Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений Практическая работа № 3. Системы, решаемые по методу Крамера	2
Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений Практическая работа № 4. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений	2
Раздел 3. Элементы аналитической геометрии.	**10**
Тема 3.1. Геометрические векторы и действия над ними	2

Практическая работа № 5. Линейные операции с векторами	
Тема 3.2.Понятия уравнения линии и уравнение поверхности Практическая работа № 6. Задачи на уравнение прямой и плоскости в пространстве	2
Тема 3.2.Понятия уравнения линии и уравнение поверхности Практическая работа № 7. Уравнение окружности, элипса, гиперболы, параболы	3
Тема 3.2.Понятия уравнения линии и уравнение поверхности Практическая работа № 8. Поверхности второго порядка	3
Раздел 4.Числовые последовательности и их пределы	**3**
Тема 4.1. Числовые последовательности и их пределы Практическая работа № 9. Предел числовой последовательности	3
Раздел 5. Предел функции одной вещественной переменной	**4**
Тема 5.1Предел функции Практическая работа №10. Определение функции. Графики элементарных функций	2
Тема 5.2Непрерывность функции Практическая работа №11. Пердел и непрерывность	2
Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной вещественной переменной	**12**
Тема 6.1 Производная функции. Основные правила дифференцирования Практическая работа №12. Производная и дифференциал функции	3
Тема 6.2 Теоремы о среднем для дифференцируемых функций Практическая работа №13. Теоремы о дифференцируемых функциях	3
Тема 6.3 Производные и дифференциалы высших порядков Практическая работа №14. Формула Тейлора	3
Тема 6.4 Использование производной при исследовании функции Практическая работа №15. Исследование функций и построение графиков	3
Раздел 7 Интегральное исчисление функции одной вещественной переменной	**4**
Тема 7.1. Неопределенный интеграл Практическая работа №16. Вычисление неопределенного интеграла	1
Тема 7.2.Определенный интеграл Практическая работа №17. Приложения определенного интеграла	2
Тема 7.3.Несобственные интегралы Практическая работа №18. Вычисление несобственных интегралов	1
Раздел 8. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных	**4**
Тема 8.1.Функции нескольких переменных. Практическая работа №19. Область определения и непрерывность функции нескольких переменных	1
Тема 8.2.Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных Практическая работа №20. Дифференциал функции нескольких переменных	3
Раздел 9.Интегральное исчисление функции нескольких переменных	**4**
Тема 9.1 Определение двойного интеграла Практическая работа №21. Вычисление двойного интеграла	2
Тема 9.2 Приложения двойного интеграла Практическая работа №22. Применение двойных интегралов	2
Раздел 10. Основы теории рядов	**7**

Тема 10.1. Числовые ряды Практическая работа №23. Исследование числовых рядов на сходимость	4
Тема 10.2.Функциональные ряды Практическая работа №24. Исследование функциональных рядов на сходимость	3
Раздел 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения	**12**
Тема 11.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия Практическая работа №25. Общее и частное решения дифференциальных уравнений	3
Тема 11.2 Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах Практическая работа №26. Решение уравнений первого порядка	3
Тема 11.3 Уравнения высших порядков Практическая работа №27. Решение уравнений высших порядков	3
Тема 11.4 Линейные уравнения высших порядков Практическая работа №28. Решение линейных уравнений высших порядков	3
Всего	**70**

Перечень рекомендуемой литературы

Основные источники:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А., Сабурова Т.Н. Элементы высшей математики / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 400 с.
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 157 с.

Дополнительные источники:

1. Богомолов Н.В. - Практические занятия по математике. – М.: ЮРАЙТ, 2017.

Интернет-ресурсы:

1. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/collection/matematika
2. Московский центр непрерывного математического образования http://www.mccme.ru
3. Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа http://www.bymath.net
4. Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября» http://mat.1september.ru
5. Задачи по геометрии: информационно-поисковая система http://zadachi.mccme.ru
6. Интернет-проект «Задачи» http://www.problems.ru
7. Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online) http://www.mathtest.ru
8. Образовательные платформы ЭБС «Юрайт» и «Знаниум».

Раздел 1.Элементы теории множеств.
Тема 1.2 Числовые множества.

Практическая работа №1.
Решение упражнений с использованием теории множеств.

Цель: формирование умений задавать множества указанием характеристического свойства и перечислением элементов; выделять подмножества, устанавливать отношения между множествами, изображать их с помощью кругов Эйлера.

Требования к знаниям и умениям:
Знать *а) Понятия:* - множество;
- элемент множества;
- характеристическое свойство элементов множества;
- подмножество;
- равные множества;
- пустое множество;
- конечное, бесконечное множество.

б) Обозначения: - $a \in A$, $b \notin A$ (для записи предложений «а принадлежит множеству А» и b не принадлежит множеству А»);

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$(для задания множества путем перечисления всех его элементов);
- $A = \{x \,/\, x \in N,\ x \le 4\}$ (для задания множества путем указания характеристического свойства его элементов);
- $A \subset B$ (для записи предложения «А подмножество В);
- $A = B$ (для записи предложения «Множества А и В равны»;
- обозначения числовых множеств: N, Z, Q, I, R.

Уметь: задавать множества, выделять подмножества, устанавливать отношения между множествами, изображать отношения между множествами с помощью кругов Эйлера

Содержание практической работы

Задание 1: Объясните, почему множество X= {2,4,6} является подмножеством множества Y={1,2,3,4,5,6,7}. Изобразите множества X и Y с помощью кругов Эйлера.

Задание 2: Даны два множества: A={2,4,6} и B= {0,2,4,6,8}. Верно ли, что:
а) множества А и В пересекаются;
в) множество А является подмножеством множества В;
c) множество P={4,0,6.8,2} равно множеству В?

Задание 3: Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами:
а) С- множество двузначных чисел,
D={3, 43, 34, 56, 103};
в) С- множество двузначных чисел,
D- множество четных натуральных чисел;
c) С- множество двузначных чисел,
D- множество трехзначных чисел;
d) С- множество двузначных чисел,
D- множество натуральных чисел, не меньших 10.

Задание 4: А – множество выпуклых четырехугольников,
В - множество параллелограммов,

C- множество прямоугольников,
D- множество ромбов,
F- множество квадратов.
Изобразите с помощью кругов Эйлера отношения между множествами:
а) A и B,
в) B и C,
с) C и D,
d) C, D и F,
е) A, B, C, D и F.

Задание 5: Какое из данных множеств является подмножеством другого:
а) A- множество натуральных чисел, кратных 3,
B- множество натуральных чисел, кратных 6,
C- множество натуральных чисел, кратных 3.
в) A- множество треугольников,
B- множество прямоугольных треугольников,
C- множество остроугольных треугольников.

Задание 6: Установите, с какими теоретико-множественными понятиями встречаются учащиеся начальных классов, выполняя задания:

а) запиши по порядку числа от 10 до 19. Подчеркни и прочитай четные числа;

б) из ряда чисел от 1 до 20 выпиши по порядку числа, которые делятся без остатка на 5;

в) из чисел 27, 45, 38, 62, 53, 72, 8, 48 выпиши те, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

Задание 7: Изобразите отношение между множествами N, Z, Q и R с помощью кругов Эйлера.

Задание 8: Известно, что элемент **а** содержится в множестве A и в множестве B. Следует ли отсюда, что: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) A=B?

Задание 9: Известно, что каждый элемент множества A содержится в множестве B. Следует ли отсюда, что: 1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) A=B?

Задание 10: Дано множество $A=\{2,4,6,8\}$. Образуйте все подмножества, содержащие два элемента.

Раздел 2. Элементы линейной алгебры
Тема 2.1. Матрицы и определители

Практическая работа № 2.
Вычисление определителей

Цель: получение практических навыков при вычислении определителей второго и третьего порядков.

Теоретические сведения

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

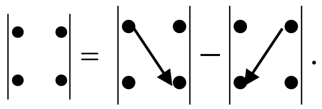
Пусть дана матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, и обозначается символами Δ *(det A,* $|A|$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу: произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Определитель второго порядка содержит две строки и два столбца, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – элементы определителя. Правило вычисления определителя второго порядка можно представить схематически:



Количество строк и столбцов в определителе всегда совпадает. Кроме определителей второго порядка существуют определители 3-го, 4-го и т. д. порядков. Определитель 3-го порядка содержит три строки и три столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителя 3-го порядка существует несколько правил.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
ПРАВИЛО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

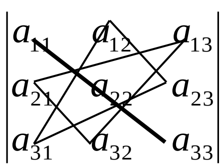
Для вычисления определителя надо повторить запись первого и второго столбцов. Проведем три левые диагонали, начиная с верхнего левого угла, и три правые диагонали. Три первые слагаемые получаются как результат произведения элементов, стоящих на каждой из левых диагоналей. Следующие три слагаемые получаются при умножении элементов, стоящих на каждой из правых диагоналей. Три последние произведения берутся с противоположным знаком.

Пример 1.

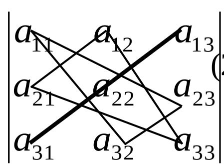
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix} = 2\cdot 0\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot(-4) + 3\cdot 5\cdot(-2) -$$

$$-3\cdot 0\cdot(-4) - 2\cdot 4\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot 7 = -65.$$

ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА



(1)



(2)

Перемножаются элементы, стоящие на левых диагоналях. Одна диагональ, *главная,* проходит через три элемента, и две диагонали побочные проходят через два элемента, третьим элементом для них является элемент, стоящий в вершине треугольника (схема 1). Аналогично находим произведения элементов, стоящих на правых диагоналях (схема 2). Эти произведения берутся с обратным знаком.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 7 + 1\cdot 4\cdot(-4) + 5\cdot(-2)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot(-4) -$$

$$-4\cdot(-2)\cdot 2 - 1\cdot 5\cdot 7 = -65.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ

Прежде чем перейти к следующему правилу вычисления определителя, введем понятие минора и алгебраического дополнения. В определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычеркнем одну строку и один столбец, останется определитель второго порядка, который принято называть ***минором***. Например, при вычеркивании первой строки и первого столбца получим минор

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

При вычеркивании "*i*"-й строки и "*j*"-го столбца получим минор Mij. Через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. ***Алгебраическим дополнением*** элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знакос «плюс», если сумма $i+j$ - четное число, и со знаком «минус» если эта сумма нечетная т.е.

$$Aij = (-1)^{i+j} \cdot Mij.$$

По свойствам определителя его можно представить в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

что соответствует разложению определителя по элементам первой строки. Аналогично можно разложить по элементам любой строки или столбца.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель разложением по элементам строки. Для определенности выберем первую строку.

Тогда $a_{11}=2$, $a_{12}=1$, $a_{13}=3$.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}=8.$$

M_{11} – получен вычеркиванием первой строки и первого столбца.

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}=-(35+16)=-51.$$

M_{12} – получен вычеркиванием первой строки и второго столбца.

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=-10.$$

Тогда $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+3\cdot A_{13}=2\cdot 8+1\cdot(-51)+3\cdot(-10)=-65.$

Вывод: Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$,а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

.

Содержание практической работы

Вариант 1.

Задание 1. Запишите миноры $M_{11}, M_{13}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}$ и алгебраические дополнения $A_{11}, A_{13}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}$ определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Справка. Число ***i*** определяется равенством $\boldsymbol{i^2=-1}$. Называется мнимой единицей.

Задание 3. Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Задание 4. Вычислить определитель, разложив его по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

Задание 5. Вычислить определитель по правилу треугольника и, разложив его по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}$$

Задание 6. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & в+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

Задание 7. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическая работа № 3.
Системы, решаемые по методу Крамера

Цели работы:

расширить представление о методах решения СЛУ и отработать алгоритм решения СЛУ методом Крамора;

развивать логическое мышление студентов, умение находить рациональное решение задачи;

воспитывать у студентов аккуратность и культуру письменной математической речи при оформлении ими своего решения.

Основной теоретический материал.

Метод Крамера . Применение для систем линейных уравнений.

Задана система N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с N неизвестными, коэффициентами при которых являются элементы матрицы $A(a_{ij})$, а свободными членами - числа $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \ldots + a_{NN}x_N = b_N \end{cases}$$

Первый индекс i возле коэффициентов a_{ij} указывает в каком уравнении находится коэффициент, а второй j - при котором из неизвестным он находится.

Если определитель матрицы A не равен нулю

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0$$

то система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение. Решением системы линейных алгебраических уравнений называется такая упорядоченная совокупность N чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, которая при $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_N = \lambda_N$ превращает каждое из уравнений системы в правильную равенство. Если правые части всех уравнений системы равны нулю, то систему уравнений называют однородной. В случае, когда некоторые из них отличны от нуля – неоднородной $b_j \neq 0, (j = 1, 2, \ldots, k)$. Если система линейных алгебраических уравнений имеет хоть одно решение, то она называется совместной, в противном случае - несовместимой. Если решение системы единственное, то система линейных уравнений называется определенной. В случае, когда решение совместной системы не единственное, систему уравнений называют неопределенной. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными (или равносильными), если все решения одной системы является решениями второй, и наоборот. Эквивалентны (или равносильны) системы получаем с помощью эквивалентных преобразований.

Эквивалентные преобразования СЛАУ

1) перестановка местами уравнений;

2) умножение (или деление) уравнений на отличное от нуля число;

3) добавление к некоторого уравнения другого уравнения, умноженного на произвольное, отличное от нуля число.

Решение СЛАУ можно найти разными способами, например , по формулам Крамера (метод Крамера)

Теорема Крамера. Если определитель Δ системы N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными отличен от нуля $\Delta \neq 0$ то эта система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_N = \frac{\Delta_N}{\Delta}$. $\Delta_j\,(j = 1, 2, \ldots, N)$ - определители, образованные с Δ заменой j -го столбца, столбцом из свободных членов.

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ отличен от нуля, то СЛАУ решений не имеет. Если же $\Delta_j = 0,\ (j = 1, 2, \ldots, N)$, то СЛАУ имеет множество решений.

Задача 1.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot (-3) - [(-1) \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-3)] =$$
$$= 4 + 8 - 12 + 4 + 16 + 6 = 26.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то заданная система уравнений совместная и имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \; = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot (-3) - [(-1) \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-3)] =$$
$$= 6 + 10 + 12 + 5 - 16 + 9 = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \; = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) \cdot 5 - [(-1) \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 5] =$$
$$= 16 + 12 + 20 + 16 + 24 - 10 = 78;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&2&3\\-4&1&4\\4&-3&5\end{vmatrix}= \;=2\cdot1\cdot5+2\cdot4\cdot4+3\cdot(-4)\cdot(-3)-\left[3\cdot1\cdot4+2\cdot(-4)\cdot5+2\cdot4\cdot(-3)\right]=$$
$$=10+32+36-12+40+24=130.$$

По формулам Крамера находим неизвестные

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{26}{26}=1,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{78}{26}=3,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{130}{26}=5.$$

Итак $x_1=1, x_2=3, x_3=5$ единственное решение системы.

Задача 2.

Дана система четырех линейных алгебраических уравнений. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0;\\5x_1-3x_2+2x_3-8x_4=1;\\3x_1+5x_2+x_3+4x_4=0;\\4x_1+2x_2+3x_3+x_4=3.\end{cases}$$

Решение.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных. Для этого разложим его по первой строке.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\5&-3&2&-8\\3&5&1&4\\4&2&3&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-3&2&-8\\5&1&4\\2&3&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}5&2&-8\\3&1&4\\4&3&1\end{vmatrix}+$$
$$+1\cdot\begin{vmatrix}5&-3&-8\\3&5&4\\4&2&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}5&-3&2\\3&5&1\\4&2&3\end{vmatrix}.$$

Найдем составляющие определителя:

$$\begin{vmatrix}-3&2&-8\\5&1&4\\2&3&1\end{vmatrix}=-3\cdot1\cdot1+2\cdot4\cdot2+(-8)\cdot5\cdot3-\left[(-8)\cdot1\cdot2+2\cdot5\cdot1+(-3)\cdot4\cdot3\right]=-65;$$

$$\begin{vmatrix}5&2&-8\\3&1&4\\4&3&1\end{vmatrix}=5\cdot1\cdot1+2\cdot4\cdot4+(-8)\cdot3\cdot3-\left[(-8)\cdot1\cdot4+2\cdot3\cdot1+5\cdot4\cdot3\right]=-69;$$

$$\begin{vmatrix}5&-3&-8\\3&5&4\\4&2&1\end{vmatrix}=5\cdot5\cdot1+(-3)\cdot4\cdot4+(-8)\cdot3\cdot2-\left[(-8)\cdot5\cdot4+(-3)\cdot3\cdot1+5\cdot4\cdot2\right]=58;$$

$$\begin{vmatrix}5&-3&2\\3&5&1\\4&2&3\end{vmatrix}=5\cdot5\cdot3+(-3)\cdot1\cdot4+2\cdot3\cdot2-\left[2\cdot5\cdot4+(-3)\cdot3\cdot3+5\cdot1\cdot2\right]=52.$$

Подставим найденные значения в определитель $\Delta=-65+69+58-52=10.$

Детерминант $\Delta=10\neq0$, следовательно система уравнений совместная и имеет единственное решение. Вычислим определители по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим каждый из определителей по столбцу в котором есть больше нулей.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 3 \cdot (-25) = 70;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 + 3 \cdot (-29) = -80;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 \cdot (18) = -50;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 3 \cdot 22 = 60.$$

По формулам Крамера находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{70}{10} = 7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{80}{10} = -8, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{50}{10} = -5, x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{60}{10} = 6.$$

Решение системы $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5.$

Содержание практической работы

Решите систему уравнений по формулам Крамера

1. $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2; \\ 4x + 3y + 2z = 16; \\ 2x - 3y + z = 17. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y + 2z = -3; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x + y + 3z = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 2x - y - z = 1; \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

Тема 2.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическая работа № 4.

Однородные и неоднородные системы линейных уравнений

Цель работы: изучение численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Описание метода Гаусса с выбором главного элемента для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Решение систем линейных алгебраических уравнений – одна из основных задач вычислительной линейной алгебры.

Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса. Этот метод (который также называют методом последовательного исключения неизвестных) известен в различных вариантах уже более 2000 лет.

Вычисления с помощью метода Гаусса заключаются в последовательном исключении неизвестных из системы для преобразования ее к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей. Вычисления значений неизвестных производят на этапе обратного хода.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора).

На 1-м шаге метода среди элементов a_{ij} определяют максимальный по модулю элемент. Первое уравнение системы и уравнение с номером i1 меняют местами. Далее стандартным образом производят исключение неизвестного x_{i1} из всех уравнений, кроме первого.

Будем называть его главным элементом 1-го шага.

Найдем величины $q_{i1} = a_{i1}/a_{11}$ (i = 2, 3, …, n), называемые множителями 1-го шага. Вычтем последовательно из второго, третьего, …, n-го уравнений системы первое уравнение, умноженное соответственно на $q_{21}, q_{31}, \ldots, q_{n1}$. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при x_1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Матрица А является верхней треугольной. На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим x_n. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим xn–1. Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

Вычисление точностной оценки по координатам производится по следующей формуле:

$$\delta = max|x_i - x_i^*|,$$

где i = 1,…, n; x_i – координаты решения по методу Гаусса; x_i^* - координаты точного решения.

Содержание практической работы

Задание 1. Решите систему уравнений

1. $\begin{cases}2x+y+3z=7\\2x+3y+z=1\\3x+2y+z=6\end{cases}$	2. $\begin{cases}2x-y+2z=3\\x+y+2z=-4\\4x+y+4z=-3\end{cases}$	3. $\begin{cases}2x-y+3z=-4\\x+3y-z=11\\x-2y+2z=-7\end{cases}$	4. $\begin{cases}3x-2y+4z=12\\3x+4y-2z=6\\2x-y-z=-9\end{cases}$	5. $\begin{cases}2x-y-3z=-9\\x+5y+z=20\\3x+4y+2z=15\end{cases}$
6.	7.	8.	9.	10.

$\begin{cases} 3x-y+z=12 \\ x+2y+4z=6 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 8x+3y-6z=-4 \\ x+y-z=2 \\ 4x+y-3z=-5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y-5z=5 \\ 2x+3y-4z=12 \\ x-2y+3z=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+2z=8 \\ x+y+2z=11 \\ 4x+y+4z=22 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$

Раздел 3. Элементы аналитической геометрии.
Тема 3.1. Геометрические векторы и действия над ними

Практическая работа № 5.
Линейные операции с векторами

Цель: овладеть навыками использования правил действий над векторами в векторной и координатной формах.

Теоретическая часть

Любой направленный отрезок прямой называется вектором.

Вектор, заданный парой несовпадающих точек А и В, обозначается $\overrightarrow{AB}$, причем в этой записи А-начало вектора, В-его конец.

Векторы могут быть записаны с помощью строчных букв: $\vec{a}$; $\vec{в}$; $\vec{c}$, $\vec{d}$ …

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Например, $\overline{AA}$ *или* $\bar{0}$ является нулевым вектором.

Длиной вектора называется длина порождающего его отрезка, обозначается, $|\overline{AB}|, |\bar{a}|$, говорят «модуль вектора». Длина нулевого вектора $|\overline{AA}| = 0$.

Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на паралле прямых.

Так, на рис.1 коллинеарными являются следующие векторы: $\overline{FD}$ *и* $\overline{FB}$; $\overline{CA}$ *и* $\overline{DB}$; $\overline{FO}$ *и* $\overline{CO}$. (коллинеарных векторов есть такие, у которых направления совпадают. Эти векторы назыв сонаправленными и пишут $\overline{FO} \uparrow\uparrow \overline{OC}$ (см. рис.1).

Если направления векторов противоположно направлены, то их и называют противопол направленными и пишут $\overline{CA} \uparrow\downarrow \overline{FB}$; $\overline{FO} \uparrow\downarrow \overline{CO}$. (см. рис.1)

Два коллинеарных вектора называют равными, если они сонаправлены и имеют равные длины; др словами, $\bar{a} = \bar{b}$, *если* $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ *и* $|\bar{a}| = |\bar{b}|$. На рис.2 $\overline{EK} = \overline{FL}$, *но* $\overline{EK} \neq \overline{LF}$.

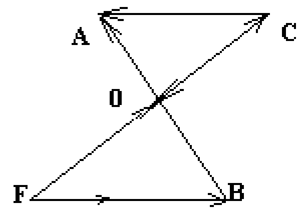


рис.1

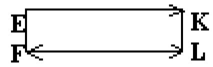


рис.2

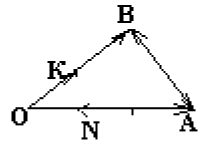


рис.3

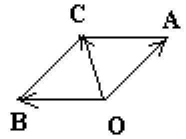


рис.4

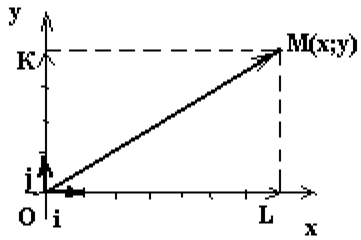


рис.5

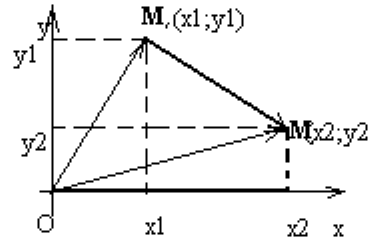


рис.6

Действия над векторами

1. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец с - с концом вектора $\bar{b}$, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ перенесено в конец вектора $\bar{a}$ (правило треугольника). На рис.3 $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$ *или* $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}.$ На рис .4 $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$ (правило параллелограмма). Существует правило многоугольника.

Свойства суммы векторов:

- $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ (переместительное свойство)
- $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ (сочетательное свойство)
- $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}.$

2. Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют сумму вектора $\bar{a}$ и $-\bar{b}$, т.е. $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b}).$ Векторы $\bar{b}$ и $-\bar{b}$ называются противоположными. На рис.3 $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$ и $\overline{OB}-\overline{OA}=\overline{AB}.$

3. Произведением вектора $\bar{a}$ на вещественное число k называется вектор $\overline{ka}$, который имеет длину, равную $k|\bar{a}|$, и коллинеарен $\bar{a}$. При этом если $k\rangle 0$, *то* $\bar{a}\uparrow\uparrow\overline{ka}$; *если* $k\langle 0$, *то* $\bar{a}\uparrow\downarrow\overline{ka}$.

На рис.3 $\overline{OK}=\frac{1}{2}\overline{OB};\ \overline{AN}=-\frac{2}{3}\overline{OA}$.

Декартова система координат

Если задана прямоугольная система координат XOY, на осях OX и OY взяты единичные векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ соответственно, то справедливо равенство $\overline{OM}=x\bar{i}+y\bar{j}$ (см. рис.5).Докажите самостоятельно.

Числа x и y называются координатами вектора $\overline{OM}$, *пишут* $\overline{OM}(x;y)$. На рис.5 $\overline{OM}(7;4)$.Объясните почему.

Если вектор $\overline{M_1M_2}$ не проходит через начало координат (рис.6), то $\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}=(x_2;y_2)-(x_1;y_1)=(x_2-x_1;y_2-y_1)$, т.е. **для нахождения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.**

Пример1. Даны точки А (3;2), В(-1;5), С(0;3). Найти координаты векторов $\overline{AB};\ \overline{BC};\ \overline{AC}$.

Решение: $\overline{AB}(-1-3;5-2)$, $\overline{AB}(-4;3)$; $\overline{BC}(0-(-1);3-5)$, $\overline{BC}(1;-2)$; $\overline{AC}(-3;1)$.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

1) при сложении двух и более числа векторов их одноименные координаты складываются, т.е. если $\overline{a}(x_1;y_1)$, $\overline{b}(x_2;y_2)$, *то* $\overline{a}+\overline{b}(x_1+x_2;y_1+y_2)$.

2) при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются, т.е. если $\overline{a}(x_1;y_1)$ *и* $\overline{b}(x_2;y_2)$, *то* $\overline{a}-\overline{b}(x_1-x_2;y_1-y_2)$.

3) при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число, т.е. если $\overline{a}(x;y)$, *то* $k\overline{a}(kx;ky)$.

Пример2. Даны векторы $\overline{a_1}(-2;4)$; $\overline{a_2}(3;1)$. Найти а) $\overline{a_1}+\overline{a_2}$; *б)* $\overline{a_2}-\overline{a_1}$; *в)*$0{,}4\overline{a_1}$; *г)* $-\frac{1}{3}\overline{a_2}$.

Решение. Согласно приведенным правилам, получим:

а) $\overline{a_1}+\overline{a_2}(-2+3;\ 4+1)$; $\overline{a_1}+\overline{a_2}(1;\ 5)$. б) $\overline{a_2}-\overline{a_1}(3-(-2);\ 1-4)$; $\overline{a_2}-\overline{a_1}(5;\ -3)$.

в)$0{,}4\,\overline{a_1}(-2\bullet 0{,}4;\ 4\bullet 0{,}4)$; $0{,}4\overline{a_1}(-0{,}8;\ 1{,}6)$. г)-1/3 $\overline{a_2}(-1/3\bullet 3;\ -1/3\bullet 1)$; $\overline{a_2}(-1;\ -1/3)$.

Ответ: $\overline{a_1}+\overline{a_2}(1;\ 5)$; $\overline{a_2}-\overline{a_1}(5;\ -3)$; $0{,}4\overline{a_1}(-0{,}8;\ 1{,}6)$; $-1/3\overline{a_2}(-1;\ -1/3)$.

Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости

Длина вектора, выходящего из начала координат (см. рис.5), равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, т.е.

$$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Если вектор задан двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ *и* $M_2(x_2;y_2)$, *то* $\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. **(2)** По этой формуле можно найти расстояние между двумя точками, с заданными координатами (объясните почему).

Пример3. Найти длину вектора $\overline{AB}$; если А (5; 2), В (8;-2).

Решение. Применяя формулу (2), получим $\overline{AB} = \sqrt{(8-5)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$

Ответ: $\overline{AB} = 5$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\overline{a};\overline{b}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Если векторы заданы своими координатами $\overline{a}\{x_1;y_1\}$ *и* $\overline{b}\{x_2;y_2\}$, то скалярное произведение находят так:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 4 В равностороннем треугольнике АВС со стороной, равной 4, найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

Решение: так как углы в равностороннем треугольнике по 60^0, то, используя формулу (3), получим $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 4\cdot 4\cdot\cos 60^0 = 16\cdot\frac{1}{2} = 8.$

Ответ: 8.

Используя формулы (1), (3), (4),можно вывести формулу для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos\angle\left(\overline{a};\overline{b}\right) = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Пример 5 Найти угол А в треугольнике АВС, если А(6;7), В(3;3), С(1;-5).

Решение: Определим координаты векторов $\overline{AB}\{-3;-4\}, \overline{AC}\{-5;-12\}$. Вычислим косинус угла между векторами по формуле (5):

$$\cos\angle\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)=\frac{-3\cdot(-5)+(-4)\cdot(-12)}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}}=\frac{63}{5\cdot 13}=\frac{63}{65}.$$

$\angle(\overline{AB};\overline{AC})=\arccos\frac{63}{65}$. *Ответ* : $\arccos\frac{63}{65}$.

Содержание практической работы

1.Найти координаты векторов $\overline{AB}; \overline{CB}; \overline{CA}$, если $\overline{AB}=2\bar{i}+3\bar{j}; \overline{CB}=-5\bar{i}; \overline{CA}=\bar{i}-7\bar{j}$.

2. Найти координаты векторов $\overline{BA}; \overline{BC}; \overline{AC}$, если $\overline{BA}=3\bar{i}-5\bar{j}; \overline{BC}=4\bar{j}; \overline{AC}=-8\bar{i}+\bar{j}$.

3. Даны точки A(3;-1);B(0;-5);C(-2;1). Найти: $\overline{AB}; \overline{BC}; \overline{CA}; \overline{AB}+\overline{BC}; \overline{AC}-\overline{AB}; \bar{m}=2\overline{AB}+3\overline{BC}-0,5\overline{CA}$.

4. Даны точки A(4;0), B(-1;3),C(5;7). Найти: $\overline{AC}; \overline{AB}; \overline{BC}; \overline{AB}+\overline{BC}; \overline{AB}-\overline{BC}; \bar{m}=-3\overline{AB}+2\overline{BC}-5\overline{AC}$.

5. Дан треугольник с вершинами F(7;7),D(4;3),C(3;4).Найти его периметр.

6. Дан треугольник ABC, A(-4;1), B(-2;4), C(0;1).Доказать, что данный треугольник равнобедренный.

7. Диагонали квадрата АВСД пересекаются в точке О. Найди угол между векторами:

а) $\overline{ДС}$ *и* $\overline{АД}$, *б*) $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, *в*) $\overline{OA}$ *и* $\overline{OC}$;

8. Диагонали ромба АВСД пересекаются в точке О, и диагональ ВД равна стороне ромба. Найди угол между векторами:

а) $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$; *б*) $\overline{ДВ}$ *и* $\overline{OB}$; *в*) $\overline{OC}$ *и* $\overline{ОД}$.

9. Вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a}\{3;5\}, \bar{b}\{-2;7\}$ и определить вид угла между данными векторами.

10. Вычислите скалярное произведение векторов и определить вид угла, образованного между векторами $\bar{c}\{0,5;\ 7\}; \bar{d}\{7;-0,5\}$.

11. Найти угол между векторами $\overline{FD}$ *и* $\overline{DC}$, *если* $F(1;6)$, $D(1;0)$, $C(-2;3)$.

12. Найти угол между векторами $\overline{RL}$ *и* $\overline{OP}$, если R(0;3), O(6;-1), L(5;0), P(9;4).

Тема 3.2.Понятия уравнения линии и уравнение поверхности

Практическая работа № 6.

Задачи на уравнение прямой и плоскости в пространстве

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Прямые и плоскости в пространстве». Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Содержание практической работы

Вариант 1.

1.В треугольнике АВС середины сторон АВ и ВС лежат в плоскости α, а сторона АС не лежит в этой плоскости. Докажите, сто прямая АС параллельна плоскости α.

2. Известно, что прямые а и b параллельны, прямая а перпендикулярна плоскости α, прямая с лежит в плоскости α. Каково взаимное расположение прямых b и с? Сделайте чертеж и обоснуйте ответ

3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр к плоскости прямоугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин прямоугольника.

Вариант 2.

1.Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выпишите: а) две пары ребер, принадлежащих параллельным прямым; б) две пары ребер, принадлежащих скрещивающимся прямым; в) две пары граней, принадлежащих параллельным плоскостям.

2. Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30^0. Чему равна длина проекции наклонной на эту плоскость?

3. Дан прямоугольный треугольник со сторонами 3 и 4см, в вершине острого угла восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до вершин треугольника.

Вариант 3.

1.Прямые а и с параллельны, а прямые а и b пересекаются. Могут ли прямые b и с быть параллельными? Ответ обоснуйте.

2. Точки А и В расположены по одну сторону плоскости α, АС и ВD – перпендикуляры к этой плоскости, АС=6 см, ВD=3 см, СD=18 см. Найдите расстояние между точками А и В.

3. Дан прямоугольник со сторонами 3 и 4см, в точке пересечения диагоналей прямоугольника восстановлен перпендикуляр к плоскости прямоугольника, длина которого 7см. Найти расстояние от вершины перпендикуляра до сторон прямоугольника.

Тема 3.2.Понятия уравнения линии и уравнение поверхности

Практическая работа № 7.
Уравнение окружности, элипса, гиперболы, параболы

Цель работы:
сформировать у студентов представление о кривых второго порядка;
научиться использовать свойства окружности и эллипса при решении различных задач;
повышать математическую культуру студентов.

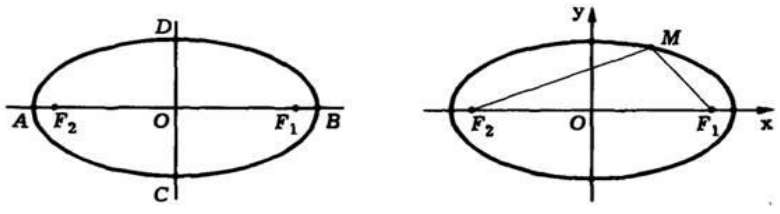
Основной теоретический материал.
Кривые второго порядка: эллипс, окружность, парабола, гипербола.

Кривыми второго порядка на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.

Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается эллипс, при пересечении образующих обеих полостей – гипербола, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является парабола. Кривая второго порядка на плоскости в прямоугольной системе координат описывается уравнением: $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Эллипс.

Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть заданная постоянная величина, называется эллипсом.



а б

Каноническое уравнение эллипса.

Для любого эллипса можно найти декартову систему координат такую, что эллипс будет описываться уравнением (каноническое уравнение эллипса): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $0<b\le a$. Оно описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями координат. Число a называют большой полуосью эллипса , а число b – его малой полуосью .

Свойства эллипса:

Фокальное свойство. Если F_1 и F_2 — фокусы эллипса, то для любой точки X, принадлежащей эллипсу, угол между касательной в этой точке и прямой (F_1X) равен углу между этой касательной и прямой (F_2X) .

Прямая, проведённая через середины отрезков, отсечённых двумя параллельными прямыми, пересекающими эллипс, всегда будет проходить через центр эллипса. Это позволяет построением с помощью циркуля и линейки легко получить центр эллипса, а в дальнейшем оси, вершины и фокусы.

Эволютой эллипса является астроида.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\quad(0\le e<1)$.

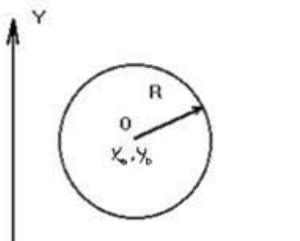
Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса. Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут.

Эллипс также можно описать как

фигуру, которую можно получить из окружности, применяя аффинное преобразование

ортогональную проекцию окружность на плоскость.

Пересечение плоскости и кругового цилиндра.



Окружность.

Окружность — геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки, называемой её центром, на заданное ненулевое расстояние, называемое её радиусом.

Каноническое уравнение окружности.

Общее уравнение окружности записывается как:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

Точка (x_0, y_0) — центр окружности, R — её радиус. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат: $x^2+y^2=R^2$.

Свойства окружности:

Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая).

Касательная к окружности всегда перпендикулярна её диаметру, один из концов которого является точкой касания.

Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.
Длину окружности с радиусом R можно вычислить по формуле $C = 2\pi R$.
Вписанный угол либо равен половине центрального угла, опирающегося на его дугу, либо дополняет половину этого угла до 180°.
Два вписанных угла, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
Вписанный угол, опирающийся на дугу длиной в половину окружности равен 90°.
Угол между двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне окружности равен полуразности мер дуг, лежащих между секущими.
Угол между пересекающ-ся хордами равен полусумме мер дуги лежащей в угле и дуги напротив нее.
Угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой.
Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
При пересечении двух хорд произведение отрезков, на которые делится одна из них точкой пересечения, равно произведению отрезков другой.
Произведение длин расстояний от выбранной точки до двух точек пересечения окружности и секущей проходящей через выбранную точку не зависит от выбора секущей и равно абсолютной величине степени точки относительно окружности.
Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и равен абсолютной величине степени точки относительно окружности.
Окружность является простой плоской кривой второго порядка.
Окружность является коническим сечением и частным случаем эллипса.

Содержание практической работы

Вариант 1.

Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты: (0;3) и (6; -7)
Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке с координатами
(-2;3).
3) Составьте уравнение эллипса, если две его вер шины находятся в точках: (0;-8) и (0;8), а фокусы эллипса в точках: (-5;0) и (5;0).
4) Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси OX, если большая ось равна 10, а эксцентриситет равен 0,6.
5) Найдите длину отрезка прямой x-2y-2=0, заключенного внутри эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

Вариант 2.

Составьте уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты: (-2;3) и (2;5)
Составьте уравнение окружности, проходящей через начало координат и имеющей центр в точке с координатами (3;-5).
Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках: (0;-4) и (0;4), а фокусы эллипса в точках: (0;-2) и (0;2).
Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси OX, если малая ось равна 16, а эксцентриситет равен 0,6.
Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку A(18;-4)

Тема 3.2.Понятия уравнения линии и уравнение поверхности

Практическая работа № 8.

Поверхности второго порядка

1. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнениями:

А) $7x^2 - 9y^2=63$

Б) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{36} =1$

В) $x^2 – 64y^2=576$

Г) $x^2 – 49y^2=1$

Д) $36x^2 - 121y^2 = 1$

Е) $16x^2 - 9y^2 =144$

2. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси ОУ, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\sqrt{5}/2$.

3. Составить каноническое уравнение гиперболы , действительная ось которой 2б=10, а уравнение асимптот имеют вид y=+- (5/3)x

4. Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ОУ равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если 2б=+ - (3/4)x.

5. Составить уравнение равносторонней гиперболы :

А) с фокусами на оси ОХ, проходящей через точку (-10; 8)

Б) с фокусами на оси ОХ, проходящей через точку (-7; -3)

В) с фокусами на оси ОУ, проходящей через точку (-4; 8)

Г) с фокусами на оси ОУ, проходящей через точку (10; -8)

6. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус: А) (-2; 4) Б) (4; 8)

7. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы , заданной уравнением :

А) $y^2= 24x$; $x^2= -26y$

Б) $x^2= 36 y$; $y^2= - 16x$

8.Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы:

А) 2 x+6 =0; y- 8=0

Б) 2y+7=0 ; 2x+40=0

9. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и длины осей эллипса, заданного уравнениями:

А) $\frac{x^2}{9} + y^2 =1$

Б) $9x^2+ 64y^2=576$

В) $9x^2+ 4 y^2= 36$

Г) $64y^2+9x^2=1$

Раздел 4.Числовые последовательности и их пределы

Тема 4.1. Числовые последовательности и их пределы

Практическая работа № 9.

Предел числовой последовательности

Цели:1) знать определение предела последовательности, свойства пределов.

3) уметь определять предел последовательности, использовать свойства пределов, решать прикладные задачи на определение предела последовательности.

Теоретические сведения

Постоянное числоА пределом функции y= f(x)в точкеx=a, если для всех x, сколь угодно мало отличающихся отa, т.е. (|x-a|)<δ),значение функцииy сколь угодно мало отличается от числа A, т.е. (|y-A|<ε), т.е. если при x→ a, y→A, то$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

Правила предельного перехода:

1.Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов lim(x+y)=limx+limy; lim(x-y)=limx- limy.
2.Предел произведения равен произведению пределов lim(x·y)=limx·limy
3.Предел отношения равен отношению пределов lim{x/y)=limx/limy
Свойства пределов:
1.limA=A, если A=constпредел постоянной равен этой постоянной
2. lim (C· y)=C · limy, еслиC = const постоянную можно вынести за знак предела.
Контрольные вопросы
1.Дайте определение предела функции.
2.Сформулируйте правила предельного перехода.
3.Каковы свойства пределов.

Содержание практической работы

1)Доходная эластичность определяется по формуле: e=$\frac{\text{Относительное изменение спроса}}{\text{Относительное изменение дохода}}$.
Относительное изменение спроса зависит от времени tпо формуле: относительное изменение спроса = t^2-5t+6 Относительное изменение дохода = t^2-6t+8
Вычислить предел эластичности при t→2
2)Вычислить предел функции:$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$;$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x^2-3x}$; $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{16-x^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x+5}{x^2+6}\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$; $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2-8x+10)$
Раздел 5. Предел функции одной вещественной переменной
Тема 5.1Предел функции

Практическая работа №10.
Определение функции. Графики элементарных функций

Цель: сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

Теоретические сведения к практической работе

Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множестваY, то говорят, что на множестве X определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(x).
Множество X называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).
Пример 1. Найти область определения функции

$1)\, y=\dfrac{15}{x+6}$

$x+6\neq 0$

$x\neq -6$

$D(\text{y})=(-\infty;-6)\cup(-6;\infty)$

$2)\, y=\dfrac{x+13}{x^2-7x+12}$

$y=\dfrac{x+13}{x^2-7x+12}=\dfrac{x+13}{(x-3)(x-4)}$

$x-3\neq 0 \quad x-4\neq 0$

$x\neq 3 \quad x\neq 4$

$D(\text{y})=(-\infty;3)\cup(3;4)\cup(4;\infty)$

$3)\, y=\sqrt{x^2-81}$

$x^2-81\geq 0$

$(x-9)(x+9)\geq 0$

$D(\text{y})=(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$

Основные свойства функции:

Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений x из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

Пример 2. Установить четность или нечетность функции.

$1)\, y=x^2+6$

$y(-\text{x})=(-x)^2+6=x^2+6=y(\text{x})$

$\Rightarrow$ *функция четная*

$2)\, y=\sin x+2x$

$y(-x)=\sin(-x)+2(-x)=-\sin x-2x=-(\sin x+2x)=-y(\text{x})$

$\Rightarrow$ *функция нечетная*

$3)\ \text{y}=\dfrac{x+2}{x^2-16}$

$\text{y}(-x)=\dfrac{(-x)+2}{(-x)^2-16}=\dfrac{-x+2}{x^2-16}$

$\Rightarrow$ *функция общего вида*

Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число M>0, такое, что $|f(\text{x})|\leq M$ для любого $x\in X$.

Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом T>0, если для любых значений x из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $f(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

График функции спроса называют кривой спроса.

Пример 3. Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 60 - \sqrt{100 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений этой функции

Функцию цены в виде $p = f^{-1}$(q)

Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 300; p_2 = 800$

Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 15$,

Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ 100 + p \ge 0 \\ 60 - \sqrt{100 + p} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ \sqrt{100 + p} \le 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ 100 + p \le 3600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \Rightarrow \quad 0 \le p \le 3500 \\ p \le 3500 \end{cases}$$

$\mathrm{D}(f) = [0; 3500]$

Выразим значение p через q:

$$\sqrt{100 + p} = 60 - q$$

$$100 + p = (60 - q)^2$$

$$100 + p = 3600 - 120q + q^2$$

$$p = q^2 - 120q + 3500$$

$$p \ge 0, \quad q^2 - 120q + 3500 \ge 0$$

$$q \in (-\infty; 50] \cup [70; \infty)$$

$$q \ge 0, \quad q \in [0; 50] \cup [70; \infty)$$

Из закона спроса следует, что с увеличением цены p от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. В нашем случае функция q убывает в промежутке $q \in [0; 50]$, следовательно, множество значений функции $E(f) \in [0; 50]$.

Функция цены имеет вид $p = q^2 - 120q + 3500$

$$p_1 = 300 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100 + 300} = 60 - 20 = 40 \quad (\textit{тыс.шт.});$$

$$p_2 = 800 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100 + 800} = 60 - 30 = 30 \quad (\textit{тыс.шт.});$$

$$q_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 100 - 120 \cdot 10 + 3500 = 2400 \quad (\textit{руб.});$$

$$q_2 = 15 \Rightarrow p_2 = 225 - 120 \cdot 15 + 3500 = 1925 \quad (\textit{руб.}).$$

Выручка от продажи составляет $u = pq$, следовательно,

$$u_1 = p_1 \cdot q_1 = 2400 \cdot 10 = 24000(\text{руб.})$$

$$u_2 = p_2 \cdot q_2 = 1925 \cdot 15 = 28875(\text{руб.})$$

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое производители готовы продать по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут q=φ(p).

Эта функция определена для тех значений $p \geq 0$, для которых $\varphi(p) \geq 0$ и множество ее значений $q \geq 0$.

Пример 4. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{9}(\mathrm{p}-2)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений функции q

Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 11; p_2 = 20$

Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(\mathrm{q})$

Решение: 1) Найдем область определения:

$$\frac{1}{9}(\mathrm{p}-2)^2 - 1 \geq 0$$

$$(\mathrm{p}-2)^2 - 9 \geq 0$$

$$(p-2-3)(p-2+3) \geq 0$$

$$(p-5)(p+1) \geq 0$$

$$p \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty)$$

$$Т.к.\, p \geq 0 \Rightarrow \quad p \in [5; \infty)$$

Множество значений функции q при $p \geq 5$ будет $q \in [0; +\infty)$.

При

$$p_1 = 11; \mathrm{q}_1 = \frac{1}{9}(11-2)^2 - 1 = 9 - 1 = 8(\textit{тыс.шт.})$$

$$p_2 = 20; \mathrm{q}_2 = \frac{1}{9}(20-2)^2 - 1 = 36 - 1 = 35(\textit{тыс.шт.})$$

Найдем функцию $p = \varphi^{-1}(\mathrm{q})$

$$q = \frac{1}{9}(\mathrm{p}-2)^2 - 1$$

$$\frac{1}{9}(\mathrm{p}-2)^2 = q + 1$$

$$(\mathrm{p}-2)^2 = 9(q+1)$$

$$p - 2 = \pm\sqrt{9(q+1)}$$

$$p - 2 = \pm 3\sqrt{(q+1)}$$

$$p = 2 + 3\sqrt{(q+1)} \quad p = 2 - 3\sqrt{(q+1)}$$

$$\mathrm{Т}.к.\, p \geq 5, \quad p = 2 + 3\sqrt{(q+1)}$$

Содержание практической работы:

Задание 1. Найти область определения функции

$1)\, y=\dfrac{32+x}{(x-4)(x+9)}$

$2)\, y=\dfrac{29-x}{x^2+15x}$

$3)\, y=\dfrac{4x}{x^2-5x+6}$

$4)\, y=\sqrt{x^2-100}$

$5)\, \mathrm{y}=\log_6(\mathrm{x}-3)$

$6)\, y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{(x-3)(x+1)}$

Задание 2. Установить четность или нечетность функции.

$1)\, y=x^4-x^2+3$

$2)\, y=\dfrac{x^5+9}{x}$

$3)\, y=-\sin x-4x$

$4)\, y=e^x+12$

$5)\, \mathrm{y}=\dfrac{x^2+2}{x^2-16}\cdot\cos x$

$6)\, \mathrm{y}=\mathrm{tgx}-2\,\mathrm{x}$

Задание 3. а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q=70-\sqrt{250+p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений этой функции

Функцию цены в виде $p=f^{-1}(\mathrm{q})$

Объем спроса при ценах на товар: $p_1=150; p_2=650$

Цену за единицу товара, если $q_1=15; q_2=20$,

Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q=40-\sqrt{50+p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений этой функции

Функцию цены в виде $p=f^{-1}(\mathrm{q})$

Объем спроса при ценах на товар: $p_1=175; p_2=350$

Цену за единицу товара, если $q_1=10; q_2=30$,

Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Задание 4. а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q=\dfrac{1}{4}(\mathrm{p}-3)^2-1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений функции q

Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1=7; p_2=11$

Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p=\varphi^{-1}(\mathrm{q})$

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q=\frac{1}{16}(p-5)^2-1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

Область определения и множество значений функции q

Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1=37; p_2=53$

Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию

Тема 5.2Непрерывность функции

Практическая работа №11.

Передел и непрерывность

Цели:

1) знать определение предела последовательности, свойства пределов, правилами раскрытия неопределенности .

2) уметь решать прикладные задачи на раскрытие неопределенности .

Теоретические сведения

Для раскрытия неопределенности вида необходимо предварительно дробь сократить, разложив на множители, а затем найти предел.

Пример 1

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(2x-3)=-3-3=-6$$

Здесь использовалась формула: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Пример 2

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)}= \ =3$$

В этом примере используется разложение квадратного трехчлена на множители $(x-x_1)(x-x_2)$

Пример 3

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

Применяли: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо числитель и знаменатель разделить на x с наибольшим показателем степени.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}==\infty$$

Контрольные вопросы

1. Какой существует прием для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$?

2. Чему равен предел отношения 1/∞ ?1/0?

Содержание практической работы

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$ 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$

3)Минимальный средний уровень торговой надбавки=$\frac{\text{фактический уровень издержек}}{1-\text{расчетная ставка налога на добавленную стоимость}}$

Фактический уровень издержек = x^3+2x^2+4 расчетная ставка налога на добавленную стоимость = $4x^3-3x^2+5$рассчитать предел при $x\to\infty$

.4)$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+4}{x^3-3x^2+5}$

$5)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^4-x+1}$

Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо числитель и знаменатель разделить на x с наибольшим показателем степени.

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}==\infty$$

Контрольные вопросы

1.Какой существует прием для раскрытия неопределенности ?

2. Как разложить на множители квадратный трехчлен?

3. Какой существует прием для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$?

4. Чему равен предел отношения 1/∞ ?1/0?

1 вариант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$

3)Минимальный средний уровень торговой надбавки=$\frac{\text{фактический уровень издержек}}{1-\text{расчетная ставка налога на добавленную стоимость}}$

Фактический уровень издержек = x^3+2x^2+4 расчетная ставка налога на добавленную стоимость = $4x^3-3x^2+5$рассчитать предел при $x\to\infty$

.4)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+4}{x^3-3x^2+5}$

5)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^4-x+1}$

2 вариант

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{x}$2)$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{x^3-27}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ 6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$

Раздел 6. Дифференциальное исчисление функции одной вещественной переменной

Тема 6.1 Производная функции. Основные правила дифференцирования

Практическая работа №12.

Производная и дифференциал функции

Цели:

1) знать определение производной функции, производные основных функций, геометрический смысл производной.

2) уметь решать прикладные задачи на определение производной функции.

Теоретические сведения

Производной функции y=f(x) по переменной хназывается предел отношения приращения функции к приращению аргумента x, когда последнее стремится к нулю, т.е. $y_x'=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной к графику функции.

Дифференциалом функции y=f(x) называется главное слагаемое приращения функции, линейное относительно Δx.$y'=\frac{dy}{dx}$

Контрольные вопросы

1.Дайте определение производной.
2.Что называют дифференцированием?
3.Каков геометрический смысл производной?
4.Чему равна производная сложной функции?
5.Дайте определение дифференциала функции.

Найти производную функции:

1) $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$; 2) $y=x^{-5}-4x^{-3}+2x-3$;

3) $y=\sin^2 x$; 4) $y=2\sqrt{x}$ $+\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}$ - $\frac{2}{\sqrt{x}}$ - + 1;

5) y=cos(x/3); 6) $y=(1+\sqrt{x}\,)^3$

7) Найти дифференциал функции: $y=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}$

Тема 6.2 Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Практическая работа №13.
Теоремы о дифференцируемых функциях

Цели:
1) знать правила нахождения производной сложной функции
2) уметь решать прикладные задачи на определение производной функции.

Теоретические сведения

Формулы дифференцирования:

1) C=const, (C)′=0; 2) (C·f(x))′=C·f′(x);
3) (f(x)+g(x))′= f′(x)+g′(x); 4) (f(x)·g(x))′=f′(x)·g(x)+f(x)·g′(x);
5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f(x)'g(x)-g(x)'f(x)}{g(x)^2}$; 6) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$
7) (sinx)′=cosx; 8) (cosx)′=-sinx.

Производная сложной функции: (f(g(x)))′=f′((g(x))·g′(x).

8) $y=x^3\cdot cosx$, dy=$3x^2$·cosx+x^3(-sinx).

ПРИМЕРЫ: Воспользуемся правилом нахождения производной суммы-разности функций, правилом вынесения постоянного множителя за знак производной и формулой $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$. Помним, что производная постоянного равна нулю!

а) $f(x)=\frac{x^3}{9}+4x^2-\frac{x}{3}+14\sqrt{x}+\sqrt{e^5}$, найти $f'(4)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{9}+4x^2-\frac{x}{3}+14\sqrt{x}+\sqrt{e^5}\right)'=\frac{(x^3)'}{9}+4(x^2)'-\frac{(x)'}{3}+14(\sqrt{x})'+(\sqrt{e^5})'=$$

$$=\frac{3\cdot x^2}{9}+4\cdot 2x-\frac{1}{3}+14\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+0=\frac{x^2}{3}+8x-\frac{1}{3}+\frac{7}{\sqrt{x}};\qquad f'(4)$$

$$=\frac{4^2}{3}+8\cdot 4-\frac{1}{3}+\frac{7}{\sqrt{4}}=\frac{16}{3}+32-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}=\frac{16-1}{3}+32+3.5=40.5$$

б) $f(x)=\frac{5}{4\cdot\sqrt[5]{x^4}}=\frac{5}{4\cdot x^{4/5}}=\frac{5}{4}\cdot x^{-4/5}$, найти $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{5}{4\cdot\sqrt[5]{x^4}}\right)'=\frac{5}{4}\cdot\left(x^{-4/5}\right)'=\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot x^{-4/5-1}=-1\cdot x^{-9/5}=-\frac{1}{x^{9/5}}=-\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}.$$

в,г,д) $f(x)=\frac{2}{5}\cdot ctgx-\frac{3\cdot e^x}{4}+2\cdot 2^x-6\cdot\log_3 x$, найти $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{2}{5}\cdot ctgx-\frac{3\cdot e^x}{4}+2\cdot 2^x-6\cdot\log_3 x\right)'=\frac{2}{5}\cdot(ctgx)'-\frac{3\cdot\left(e^{x'}\right)'}{4}+2\cdot\left(2^x\right)'-6\cdot\left(\log_{3'} x\right)'=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)-\frac{3\cdot e^x}{4}+2\cdot 2^x\cdot\ln 2-6\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 3}=-\frac{2}{5\sin^2 x}-\frac{3e^x}{4}+2\cdot 2^x\cdot\ln 2-\frac{6}{x\cdot\ln 3}.$$

Содержание практической работы

а) $f(x)=(x^2-1)(x^4+2)$, найти $f'(x)$; б) $f(x)=\frac{x^3}{2x+1}$,найти $f'(-1)$;

в) $f(x)=\frac{\ln x}{2x^4}-e^2$, найти $f'(1)$; г) $f(x)=x^2\cdot\sin x$, найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Тема 6.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Практическая работа №14.

Формула Тейлора

Цель знать возможности использования формулы Тейлора для доказывая теоремы в дифференциальном исчислении.

Теоретические сведения

Формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

где $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора.

Формула Тейлора для многочлена.

Есть функция $f(x)$ и многочлен $P_n(x)$ степени n:

$f(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$.

Преобразуем этот многочлен в многочлен степени n относительно разности $x\text{-}x_0$, где x_0 — любое число, то есть представим $P_n(x)$как:

$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_n(x-x_0)^n$ (1)

Для определения коэффициентов $A_0, A_1,\ldots, A_n$ дифференцируем n раз равенство (1):

$P'_n(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+3A_3(x-x_0)^2+\ldots+nA_n(x-x_0)^{n-1}$,

$P_n''(x)=2A_2+2\bullet 3A_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}$,

$P_n'''(x)=2\bullet 3A_3+2\bullet 3\bullet 4A_4(x-x_0)+\ldots+n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3}$,

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$P_n(n)(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\bullet 1A_n$

Подставляем $x=x_0$ в равенства, которые мы получили и равенство (1), получаем:

$P_n(x_0)=A_0,$ т. е. $A_0=P_n(x_0),$

$P'_n(x_0)=A_1,$ т. е. $A_1=\frac{P'_n(x_0)}{1!},$

$P''_n(x_0)=2A_2,$ т. е. $A_2=\frac{P''_n(x_0)}{2!},$

$P'''_n(x_0)=2\cdot 3A_3,$ т. е. $A_3=\frac{P'''_n(x_0)}{3!},$

....

$P_n^{(n)}(x_0)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1A_n,$ т. е. $A_n=\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$

Подставляем определенные значения A_0, A_1, ..., A_n в равенство (1), получаем разложение многочлена n-й степени $P_n(x)$ по степеням $(x-x_0)$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Эта формула является **формулой Тейлора для многочлена** $P_n(x)$ степени n.

Формула Тейлора для произвольной функции.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1).$$

Остаточный член формулы Тейлора.

В форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(a + \theta(x-a)\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(a + \theta_1(x-a)\right)}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Содержание практической работы

1. Разложим по формуле Тейлора функцию y = tg x по степеням x (т.е. $x_0 = 0$) до члена x^3 включительно.

Тема 6.4 Использование производной при исследовании функции

Практическая работа №15.

Исследование функций и построение графиков

Цели:

1) знать алгоритм исследования функции с помощью производной

2) уметь решать прикладные задачи на исследование функции с помощью производной..

Теоретические сведения

Функция y=f(x) монотонно возрастает, если большему значению аргумента x соответствует большее значение функции f(x) и производная $\frac{dy}{dx}$>0. Функция монотонно убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функциии производная $\frac{dy}{dx}$<0.

В точке экстремума производная функции равна нулю.

Признаки максимума: производная в точке максимума равна нулю, и в этой точке меняет знак с «плюса» на «минус»

Признаки минимума: производная в точке минимума равна нулю и меняет знак с «минуса» на «плюс»

Пример 1. Исследовать функцию $y=2x^2-3x$

А) Определим точки, в которых производная равна нулю. y′=4x– 3

4x-3=0; x_o=3/4; точка экстремума x_o=3/4.

Б) Определим знак производной при x<xo. y′(1/2)=4·1/2-3= -1<0; y′(x<xo)<0.

В) Определим знак производной при x>xo. y′(1)=4·1-3-1>0;

y′(x>xo)>0.

Г) Точка экстремума x=3/4 в этой точке производная меняет знак с «-» на «+», значит в точке x=3/4 минимум. На участке (-∞; 3/4) функция убывает; на участке (3/4; ∞) функция возрастает.

Контрольные вопросы

1.Каков геометрический смысл производной функции?

2.Каков признак возрастания функции?
3.Каков признак убывания функции?
4.Каков признак минимума функции?
5.Каков признак максимума функции?
6.Чему равна производная функции в точке минимума или максимума?

Содержание практической работы

.Найти экстремумы и точки минимума и максимума, участки возрастания и убывания функции:

1) $y = x^2 - 1$; 2) $y = (1/3)x^3-(3/2)x^2-4x+6$;
3) $y=4x^2 - 12$; 4) $y=x^5$
5)$y=3x^3$ 6)$y=x^2 - 6x + 3$
7)$y=-2x^2 + 8x - 5$

Найдите дифференциал функций:

1)$y=x^3\cos x$; 2) $y=\frac{1-x^2}{1+x}$; 3) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

Исследуйте функции и постройте их графики:

1) $Y=(1/3)x^3-9x$
2) $Y=3x^3-x$
3) $Y=2x^3-5x^2-12x+2$
4) $Y=x^4-4x^3-8x^2-1$
5) $Y=x^4+x^2/2-1$
6) $Y=x^3+3x^2-4$
7) $Y=x^4+4x^3-8x^2-5$
8) $Y=3x^4-4x^3$
9) $Y= -(1/4)x^4+2x^2$
10) $Y = -3x^5+5x^3$
11)

Раздел 7 Интегральное исчисление функции одной вещественной переменной
Тема 7.1. Неопределенный интеграл

Практическая работа №16.
Вычисление неопределенного интеграла

Цель: совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

Теоретические сведения

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const .

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$
2. $\int dF(x) = F(x) + C;$
3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$
2. $\int du = u + C;$
3. $\int u^{\alpha}du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$
5. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C;$
6. $\int e^{u}du = e^{u} + C;$
7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$
8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$
11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$
12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$
13. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$
14. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$
15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$
16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$
17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$
18. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x = \varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt = F(t)+C,$ то $\int f(x)dx = F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример1. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int \cos 4x dx;\ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ в)\int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t=4x \\ dt=(4x)'=4dx \\ dx=\dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{array}{c} t=9x+1 \\ dt=(9x+1)'=9dx \\ dx=\dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5dx = \left| \begin{array}{c} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}+C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6+C.$$

Интегрирование по частям

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV .

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,...$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx \to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx \to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx \to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\frac{dx}{x}$	

$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx \to dU=\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U=\arccos kx \to dU=-\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV=P_n(x)dx \to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \mathrm{arctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arctg}\, kx \to dU=\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arcctg}\, kx \to dU=-\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n=0,1,2,...$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 2. Проинтегрировать по частям.

$a)\int(3x-1)\sin 2xdx;$ $\qquad$ $б)\int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$а)\int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l}U=3x-1\to dU=3dx\\ dV=\sin 2xdx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Проинтегрировать функции заменой переменной:

1) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 3x}$ $\qquad$ $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\qquad$ $\int e^{1-3x}dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)dx$ $\qquad$ $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\qquad$ $\int e^{6x+5}dx$

3) $\int 10^{2x+1}dx$ $\int \sin\frac{x}{2}dx$ $\int \frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}dx$ $\int \cos 2x\,dx$ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\int \sin 2x\,dx$ $\int 3^{7x-1}dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin(2-3x)dx$ $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 2. Найти интеграл интегрированием по частям:

1) $\int (7x-1)\cos x\,dx$ $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int (6-5x)e^x\,dx$ $\int (7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int (1+2x)\cos x\,dx$ $\int \arcsin x\,dx$

5) $\int (8x-1)\sin 5x\,dx$ $\int (6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\int (3x+2)\ln x\,dx$

Тема 7.2.Определенный интеграл

Практическая работа №17.
Приложения определенного интеграла

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

Решение**.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,\ -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1)+2=-1,\ \ y_2 = 3\cdot 4+2=14.$ Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x)=3x+2,\ f_1(x)=x^2-2,$ поскольку $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$. Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot 4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot 4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y=y(t)$ и $x=x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t\in[t_0,t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\ t\in[t_0,t_1],$ прямыми x = a, x = b, где a = x(t_0), b = x(t_1), и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt\right|. \qquad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически: $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t,\ 0\le t\le 2\pi.$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x,y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\ 0\le t\le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (9) получим:

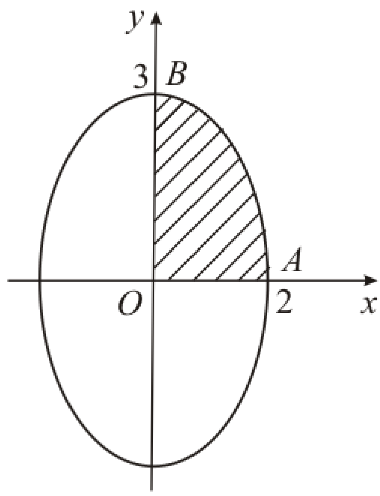


Рис. 3

$$S=4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin t\left(2\cos t\right)'dt\right|=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\right|=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для }\sin^2\alpha\text{ из таблицы 2}\end{array}\right\}=$$

$$=4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt\right|=4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)dt\right|=4\left|-3\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right|=$$

$$=4\left|-3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right|=4\left|-3\frac{\pi}{2}\right|=6\pi\approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Вычисление объемов тел вращения

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3,\ x=0,\ y=-4.$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры OABC, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V=V_1-V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $V_1=\pi\int_0^1\left(-4\right)^2dx=\pi 16x\Big|_0^1=16\pi$ (ед. объема);

$$V_2=\pi\int_0^1\left(-4x^3\right)^2dx=16\pi\int_0^1 x^6dx=16\pi\frac{x^7}{7}=\frac{16\pi}{7}\ \text{(ед. объема)};$$

$$V=V_1-V_2=16\pi-\frac{16\pi}{7}=\frac{96}{7}\pi\approx 43{,}085\ \text{(ед. объема)}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=x^2-2,\ y=1-2x$

2) $y=x^3,\quad y=8,\quad x=0$

3) $y=3x^2+1,\quad y=3x+6$

4) $y=x^2,\ y=x+1$

5) $y=x^2,\ y=2-x^2$

6) $y=x^2-1,\ y=1-x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x=2t-t^2,\quad y=t\left(t-1\right),\quad 0\le t\le 1$

2) $x=t^2-1,\quad y=t^3-t,\quad 0\le t\le 1$

3) $x=2\sin t,\quad y=\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi$

4) $x=\ln t,\quad y=\left(t-1\right)\left(3-t\right),\quad 1\le t\le 3$

5) $x=1-\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$

6) $x=\cos t,\quad y=1-\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) $y=1+\ln\cos x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{3}$

2) $x=t^2-1,\ y=t^3,\ 0\le t\le 1$

3) $y=x^{\frac{2}{3}}+1,\quad 0\le x\le 1$

4) $x=t^2-1,\quad y=\dfrac{t}{3}-t^3,\quad 1\le t\le 2$

5) $y=x^{\frac{2}{3}},\ 0\le x\le \dfrac{1}{2}$

6) $x=t^3-4,\ y=t^2,\ 0\le t\le 2$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2-y=0,\quad y=1$

2) $x^2+y=0,\quad y=-1$

3) $x-y^2=0,\quad x=1$

4) $y=4x^3,\quad x=0,\quad y=-4$

5) $y=4x^3,\quad x=1,\quad y=0$

6) $y=-4x^3,\quad x=-1,\quad y=0$

Тема 7.3.Несобственные интегралы

Практическая работа №18.
Вычисление несобственных интегралов

Цель:1) знать определение несобственного интеграла

3) уметь вычислять несобственные интегралы

Теоретические сведения

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке [a; ∞) и интегрируема на любом конечном отрезке [a; b], т.е. существует $\int_a^b f(x)dx$ для любого b > a. Предел вида $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ называют **несобственным интегралом первого рода** (или несобственным интегралом по бесконечному промежутку) и обозначают $\int_a^\infty f(x)dx$.

Таким образом, по определению, $\int_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Если предел справа существует и конечен, то несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называют **сходящимся**. Если этот предел бесконечен, или не существует вообще, то говорят, что несобственный интеграл **расходится**.

Аналогично можно ввести понятие несобственного интеграла от функции $f(x)$ по промежутку (–∞; b]:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

А несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку (–∞; +∞) определяется как сумма введенных выше интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx,$$

где а – произвольная точка. Этот интеграл сходится, если сходятся оба слагаемых, и расходится, если расходится хотя бы одно из слагаемых.

Во многих задачах, приводящих к несобственным интегралам, не обязательно знать, чему равен этот интеграл, достаточно лишь убедиться в его сходимости или расходимости. Для этого используют признаки сходимости. **Признаки сходимости несобственных интегралов:**

1) Признак сравнения.
2) Пусть для всех x$\in[a;+\infty)$ $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда, если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

2) Если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (последний интеграл в этом случае называется абсолютно сходящимся).

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны сформулированным выше.

Пример 1.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$

г) $\int_{-\infty}^{0}\frac{(x+1)dx}{1+x^2}$; д) $\int_0^{+\infty}(x+1)\sin xdx$.

Решение.

а) По определению имеем:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(arctgb-arctg0)=\lim_{b\to+\infty} arctgb=\frac{\pi}{2},$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

б) Аналогично

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b \ln^{-3}x\ d(\ln x)=\lim_{b\to+\infty}\frac{\ln^{-2}x}{-2}\Bigg|_e^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{2\ln^2 x}\Bigg|_e^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-1}{2\ln^2 b}-\frac{-1}{2\ln^2 e}\right)=\left(\frac{-1}{2\ln^2\infty}+\frac{1}{2\cdot 1}=-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2}\right)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\frac{1}{2}$.

в) По определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{\infty} f(x)dx$, причем, а – произвольное число. Положим в нашем случае $a=0$, тогда получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx+\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-x}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}\left(-e^0+e^{-a}\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}+e^0\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(-e^0+\frac{1}{e^a}\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+e^0\right)=\left(-1+\frac{1}{\infty}\right)+\left(\frac{1}{\infty}+1\right)=-1+0+0-1=0.$$

Данный интеграл сходится.

г) $$\int_{-\infty}^{0}\frac{(x+1)dx}{1-x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{1-x^2}+\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{xdx}{1-x^2}+\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1-x^2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{-1}{2}\int_a^0\frac{-2xdx}{1-x^2}+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_a^0=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{-1}{2}\int_a^0\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|-\ln\left|\frac{1+a}{1-a}\right|\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\ln\left|1-x^2\right|\Big|_a^0+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\ln 1-\ln\left|\frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1}\right|\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln 1-\ln\left|1-a^2\right|\right)+\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left(0-\ln\left|\frac{\frac{1}{\infty}+1}{\frac{1}{\infty}-1}\right|\right)=-\frac{1}{2}\left(0-\ln\left|1-\infty\right|\right)+\frac{1}{2}\left(-\ln\left|\frac{\frac{1}{\infty}+1}{\frac{1}{\infty}-1}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\infty\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{0+1}{0-1}\right|=\infty-0=\infty.$$

Значит, данный интеграл расходится.

д) Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty}(x+1)\sin xdx$. Чтобы найти первообразную подынтегральной функции, необходимо применить метод интегрирования по частям. Тогда получим:

$$\int\limits_0^{+\infty}(x+1)\sin xdx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}(x+1)\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=x+1, & dv=\sin xdx, \\ du=dx, & v=\int\sin xdx=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-(x+1)\cos x\Big|_0^b+\int\limits_0^b\cos xdx\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-(b+1)\cos b+(0+1)\cos 0+\sin x\Big|_0^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-(b+1)\cos b+1+\sin b-\sin 0\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-(b+1)\cos b+1+\sin b\right)$$

Поскольку ни $\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$, ни $\lim\limits_{b\to+\infty}\sin b$ не существуют, то не существует и $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-(b+1)\cos b+1+\sin b\right)$.

Следовательно, данный интеграл расходится.

Содержание практической работы

Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ в зависимости от п.

Решение.

При $n\neq 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\int\limits_1^{+\infty}x^{-n}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}x^{-n}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{n-1}}{(1-n)}\Big|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{n-1}}{(1-n)}-\frac{1^{n-1}}{(1-n)}\right)=\frac{1}{1-n}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{n-1}-1\right).$$

Если $n>1$, то $n-1>0$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{n-1}-1\right)=\left(\infty^{n-1}-1=\infty-1\right)=\infty$. Следовательно, интеграл расходится.

Если $n<1$, то $n-1<0$, а $1-n>0$, тогда

$$\lim_{b\to+\infty}\left(b^{n-1}-1\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{1-n}}-1\right)=\left(\frac{1}{\infty}-1=0-1\right)=1,$$

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\frac{1}{1-n}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{n-1}-1\right)=\frac{1}{1-n}\cdot 1=\frac{1}{1-n},$$

Следовательно, интеграл сходится.

Если $n=1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=\ln\infty-\ln 1=\infty-0=\infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Таким образом, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}-\begin{cases}\text{сходится при } n>1,\\ \text{расходится при } n\leq 1.\end{cases}$

Раздел 8. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных
Тема 8.1.Функции нескольких переменных.

Практическая работа №19.
Область определения и непрерывность функции нескольких переменных

Цель: сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной на некотором промежутке *X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ непрерывна на (-∞;+∞)

Решение:

$$\Delta f = \left(3\left(x_0+\Delta x\right)^2 - 2\left(x_0+\Delta x\right)+1\right) - \left(3x_0{}^2 - 2x_0+1\right) = 3x_0{}^2 + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3x_0{}^2 + 2x_0 - 1 =$$

$$= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0}\left(6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x\right) = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

x_0 – точка устранимого разрыва, если а) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$

б) в точке x_0 функция не определена

x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - скачок функции

x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Содержание практической работы

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

а) $f(x) = x + 9$

б) $f(x) = x^3 + 8$

в) $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$

г) $f(x) = 10x^2 - 12x$

Задание 2. Найти точки разрыва и установить их тип

$$a)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -e^{-x}, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ e^{x}, x > 0 \end{cases}$$

$$б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\sin x}{x}$$

$$в)\ y = f(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\cos x}{x}$$

Тема 8.2.Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных

Практическая работа №20.
Дифференциал функции нескольких переменных

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0),\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\quad \frac{df(x_0)}{dx},\quad \left.y'_x\right|_{x_0},\quad y'(x_0)$$ и другие.

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \mathrm{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:□

$$s=[(e^t-2\ln t)\sin t]'=(e^t-2\ln t)'\sin t+(e^t-2\ln t)(\sin t)'=$$

$$((e^t)'-2(\ln t)')\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t=\left(e^t-\frac{2}{t}\right)\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1; используя формулу (3), получим:

$$u'=\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right]=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)'=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=$$

$$=2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:

$$z'=\left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)'=\frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2)-(\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2)-\operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2}=\frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) *а*) $y=3x^3-\frac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5}$; *б*) $s=(1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg}t)$; *в*) $u=\ln^3\frac{V}{2}$; *г*) $z=\frac{5-\sin 3t}{e^{4t}}$.

2) *а*) $y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$; *б*) $s=(4-3\ln t)(5+2\sin t)$; *в*) $u=\sin^4(2V+3)$; *г*) $z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$.

3) *а*) $y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$; *б*) $s=(3-\cos t)(5+6\sin t)$; *в*) $u=\sqrt[3]{1-4V^2}$; *г*) $z=\frac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) *а*) $y=5x^2+\frac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7}$; *б*) $s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$; *в*) $u=\ln^2(5V-3)$; *г*) $z=\frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) *а*) $y=x^5-\frac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5}$; *б*) $s=t^4(4+\operatorname{arctg}t)$; *в*) $u=\cos^3(3V+1)$; *г*) $z=\frac{t-\arcsin 5t}{e^{-t}}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой y=f(x) в точке с абсциссой x_0.

1) $\frac{x^2-3}{x}$, $x_0=1$.

2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0=2$.

3) $\frac{x^2+3x}{3}$, $x_0=-1$.

4) $\sqrt{x}+2x$, $x_0=9$.

5) $\dfrac{x^2}{x-2}$, $x_0 = 1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции y=y(x), заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \mathrm{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y = \sin 2x + 5$;
2) $y = \ln x - x^3$;
3) $y = 4 + 8\sin x$;
4) $y = 2x - 1$.
5) $y = 1 - \cos x$;

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$
2) $y = \cos x - \ln x$
3) $y = \mathrm{sinx} + x^4$
4) $y = x^2 + \sin x$
5) $y = x + \ln x$

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left. y'_x \right|_{x_0}, \quad y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$; *б*) $s = (e^t - 2\ln t)\sin t$; *в*) $u = \mathrm{ctg}^3\dfrac{v}{3}$; *г*) $z = \dfrac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\mathrm{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\mathrm{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\mathrm{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\mathrm{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\mathrm{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\mathrm{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\mathrm{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\mathrm{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \mathrm{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\,\mathrm{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) *а*) $y = 3x^3 - \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; *б*) $s = (1+t^2)(2 - 3\mathrm{arcctg}t)$; *в*) $u = \ln^3\dfrac{V}{2}$; *г*) $z = \dfrac{5-\sin 3t}{e^{4t}}$.

2) $\quad а) \; y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$; $б) \; s=(4-3\ln t)(5+2\sin t)$; $в) \; u=\sin^4(2V+3)$; $г) \; z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$. 3) $а) \; y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$; $б) \; s=(3-\cos t)(5+6\sin t)$; $в) \; u=\sqrt[3]{1-4V^2}$; $г) \; z=\frac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $а) \; y=5x^2+\frac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7}$; $б) \; s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$; $в) \; u=\ln^2(5V-3)$; $г) \; z=\frac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) $а) \; y=x^5-\frac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5}$; $б) \; s=t^4(4+\mathrm{arctg}\,t)$; $в) \; u=\cos^3(3V+1)$; $г) \; z=\frac{t-\arcsin 5t}{e^{-t}}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\frac{x^2-3}{x}$, $x_0=1$.

2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0=2$.

3) $\frac{x^2+3x}{3}$, $x_0=-1$.

4) $\sqrt{x}+2x$, $x_0=9$.

5) $\frac{x^2}{x-2}$, $x_0=1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\cos(2t+6) \\ y=\sin(2t+6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\mathrm{tg}\,t \\ y=t^2-8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=e^{4t} \\ y=(1-4t)^2 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y=\sin 2x+5$;

2) $y=\ln x-x^3$;

3) $y=4+8\sin x$;

4) $y=2x-1$.

5) $y=1-\cos x$;

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y=\ln x+9$

2) $y=\cos x-\ln x$

3) $y=\mathrm{sinx}+x^4$

4) $y=x^2+\sin x$

5) $y=x+\ln x$

Раздел 9.Интегральное исчисление функции нескольких переменных
Тема 9.1 Определение двойного интеграла

Практическая работа №21.
Вычисление двойного интеграла

Цели:
1) знать: понятие функции двух переменных, предел функции двух переменных, определенный интеграл и его свойства, таблица неопределенных интегралов, свойства двойных интегралов,
2) уметь находить двойные интегралы сведением его к повторному (двукратному) интегралу.

Теоретические сведения

Пусть в некоторой области D плоскости xOy задана непрерывная функция $z= f(x, y)$ (рис.1).

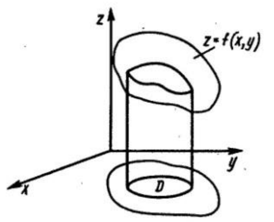


Рис.1

Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей с площадями ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3, ...ΔS_n и в каждой из них произвольно выберем по одной точке $M_i(x_i,y_i)$. Умножим значение функции в этой точке $f(x_i,y_i)$ на площадь ΔS_i соответствующей области и составим сумму этих произведений, т. е. $\sum f(x_i,y_i)\Delta S_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области D.

Двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D называется предел этой суммы:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dS \qquad (1)$$

где d – наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i . Функция $z= f(x, y)$, для которой предел (1) существует и конечен, называется интегрируемой в этой области.

В прямоугольных координатах дифференциал площади равен $dS = dxdy$, тогда двойной интеграл примет вид

$$I = \iint_D f(x,y)dS \qquad (2)$$

Если $f(x,y)>0$, то двойной интеграл функции $z= f(x, y)$ по области D равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры D, и снизу плоскостью $z=0$ (рис.1).

Основные свойства двойного интеграла.

1°**.** *Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций:*

$$\iint_D (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy \pm \iint_D f_2(x,y))dxdy$$

2°. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:*

$$\iint_D kf(x,y)dS = k\iint_D f(x,y)dS$$

3°. *Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части, т. е. если область D состоит из двух областей D*$_1$ *и D*$_2$*, то*

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS$$

Пример 1.

Вычислить двойной интеграл $\int_D (x+2y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=x$, $y=4x$, $y=\frac{4}{x}$.

Решение:

Находим точки пересечения этих линий (рис.5):

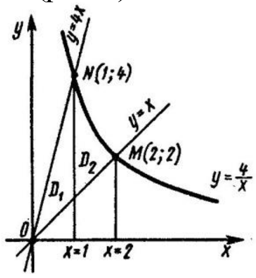


Рис.5

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = \dfrac{4}{x}\ , \quad N(1;4) \end{cases}$$

Область D разобьем на две области D_1 и D_2, которые соответственно определяются системами неравенств $0 \le x \le 1, x \le y \le 4x,$ и $1 \le x \le 2, x \le y \le {}^4/_x$.

Вычислим двойной интеграл по области D_1:

$$I_1 = \iint_{D_1} (x+2y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^{4x} (x+2y)dy = \int_0^1 (xy+y^2)\Big|_x^{4x} dx = \int_0^1 (4x^2+16x^2-x^2-x^2)dx$$

$$= 18\int_0^1 x^2dx = 18\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 6$$

Вычислим двойной интеграл по области D_2:

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} (x+2y)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4/x} (x+2y)dy = \int\limits_1^2 (xy+y^2)\Big|_x^{4/x} dx = \int\limits_1^2 \left(4+\frac{16}{x^2}-x^2-x^2\right)dx$$

$$= \int\limits_1^2 (4+16x^{-2}-2x^2)dx = \left(4x-\frac{16}{x}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = 7\frac{1}{3}$$

Значит, $I = I_1 + I_2 = 6 + 7\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$

Тема 9.2 Приложения двойного интеграла

Практическая работа №22.

Применение двойных интегралов

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площадей, длин и объемов фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1) + 2 = -1,\ \ y_2 = 3\cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x) = 3x + 2,\ f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int\limits_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right)dx = \int\limits_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3\cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4\cdot 4 - \left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4\cdot(-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$, $b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \right|. \qquad (9)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически: $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

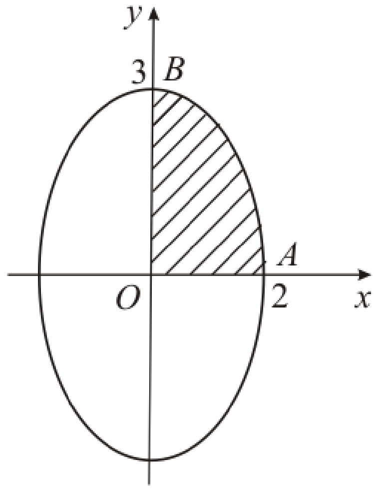


Рис. 3

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (9) получим:

$$S = 4\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t (2\cos t)' dt \right| = 4\left| -6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt \right| = \left\{ \begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 4\left| -6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) dt \right| = 4\left| -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| = 4\left| -3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| =$$

$$= 4\left| -3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right) \right| = 4\left| -3\frac{\pi}{2} \right| = 6\pi \approx 18{,}850 \text{ (кв. ед.)}.$$

Вычисление объемов тел вращения

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3,\ x = 0,\ y = -4.$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\,dx = \pi 16x\big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2,\quad y = t(t-1),\quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1,\quad y = t^3 - t,\quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t,\quad y = \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t,\quad y = (t-1)(3-t),\quad 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t,\quad y = 1 - \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

Задание 3. Найти длину дуги кривой.

1) $y = 1 + \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

2) $x = t^2 - 1,\ y = t^3,\ 0 \le t \le 1$

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 1,\quad 0 \le x \le 1$

4) $x = t^2 - 1,\quad y = \frac{t}{3} - t^3,\quad 1 \le t \le 2$

5) $y = x^{\frac{2}{3}},\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$

6) $x = t^3 - 4,\ y = t^2,\ 0 \le t \le 2$

Задание 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0, \quad y = 1$

2) $x^2 + y = 0, \quad y = -1$

3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$

4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$

5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$

6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

Раздел 10. Основы теории рядов
Тема 10.1. Числовые ряды

Практическая работа №23.
Исследование числовых рядов на сходимость

Цель:1) знать определение числового ряда, признаки сходимости ряда, приемы разложения функции в числовой ряд.
3) уметь решать прикладные задачи на определение сходимости ряда

Теоретические сведения

Бесконечная последовательность чисел, соединенных знаком сложения $u_1+u_2+\ldots u_n$ называется числовым рядом. Выражение $u_n = f(n)$, где f(n) функция натурального аргумента, называется общим членом ряда. Запись ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. (*)

Частныесуммыряда: $S_1=U_1$; $S_2=U_1+U_2$; $S_3=U_1+U_2+U_3$;…
$S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots U_n$

Получилась последовательность: $S_1, S_2, S_3,\ldots S_n$

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$= Sсуществует, то ряд называется сходящимся, а его сумма равна S.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, бесконечен или вовсе не существует, то ряд (*) называется расходящимся.

Пример 1

Исследовать ряд на сходимость

$+ \; + \; +\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

Решение

Надо узнать существует предел суммы членов или нет.

Представим каждый член ряда в виде $\frac{1}{k(k+1)} = \; +$

Тогда сумму можно представить:

S_n = (1-)+ (-) + (-)+…+(-) + (-) = 1 -

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n+1}) = 1$

Следовательно ряд имеет предел и поэтому является сходящимся.

Необходимым условием сходимости ряда является $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости ряда

– *Признак Даламбера*

$Lim[(U_{n+1})/U_n] = \rho$; если $\rho>1$ – ряд расходится: $\rho<1$- ряд сходится $n\to\infty$

ρ=1неопределен.

-*Признак Коши*

$Lim\ (U_n)^{1/n}=\rho$; если $\rho>1$ – ряд расходится: $\rho<1$- ряд сходится

$n\to\infty$

ρ=1неопределен.

-*Признак сравнения*: Если для рядов $U_1+U_2+U_3+\ldots U_n+\ldots$ $V_1+V_2+V_3+\ldots V_n+\ldots$ существует конечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} (U_n/V_n)=K$, где $K>0$ тогда оба ряда одновременно сходятся или расходятся. Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого ряда; заведомо сходящегося. Исследуемый ряд расходится, если члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

Пример 2

Исследовать ряд на сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n} = + \; + + \ldots ++ \ldots$

Решение

$\lim\limits_{n\to\infty}.(U_{n+1})/(U_n).=\lim\limits_{n\to\infty} \quad \frac{2(n+1)5^n}{5^n 2n} = <1$, ряд сходится.

Пример 3

Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

Решение

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ Ряд расходится

Контрольные вопросы

1.Дайте определение числового ряда.

2.Каков необходимый признак сходимости числового ряда? Дайте его определение.

3.Сформулируйте достаточные признаки сходимости ряда.

Содержание практической работы

Исследуйте ряд на сходимость

1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$ 2)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n-1}$

Тема 10.2.Функциональные ряды

Практическая работа №24.

Исследование функциональных рядов на сходимость

Цель:1) знать определение функционального ряда, признаки сходимости ряда

3) уметь решать прикладные задачи на определение сходимости ряда, выполнять разложение функции в ряд Маклорена

Теоретические сведения

Числовой ряд $U_1+U_2+U_3+\ldots U_n+\ldots$ (*) называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа. Числовой ряд называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

Признак сходимости Лейбница для знакочередующегося ряда. Если члены знакочередующегося ряда (*) монотонно убывают по абсолютной величине и общий член Un стремится к нулю при $n\to\infty$, то ряд (*) сходится.

Знакопеременный ряд (*) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $|U_1|+|U_2|+U_3|+\ldots|U_n|+\ldots$(**), составленный из абсолютных величин его членов, т.е. всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Степенным рядом называется ряд вида

$\sum_{n=0}^{\infty}.a_n x^n = a_o + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_n x^{n+\ldots(***)}$, где числа$a_o$,$a_1$, a_2, a_3, a_nназываются коэффициентами ряда, а член $a_n x^n$называется общим членом ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится. Число Rназывается радиусом сходимости ряда (***), если при |x|<Rряд

сходится и притом абсолютно, а при |x|>Rряд расходится. Радиус сходимости равен пределу $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$

Рядом Тейлора функции f(x) называется степенной ряд вида

.f(x) =f(a)+f'(a)(x-a)+$\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$

$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

Если =0, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется рядом Маклорена.

Пример 3

Разложить функцию f(x)=cosx в ряд Маклорена

/f(0)=cos0=1; f '(x) = - sinx; f '(0)=-sin0=0; f''(x) = -cosx;

f''(0) = -cos0=-1; f'''(x) = sinx; f'''(0) = sin0=0;…

f(x)=1+ $\frac{0}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\ldots$

f(x) = 1--$\frac{x^2}{2!}$-$\frac{x^4}{4!}$-…

Контрольные вопросы

1.Какой ряд называется знакопеременным? Знакочередующимся?

2.Каковы признаки сходимости знакочередующегося ряда?

3.Дайте определение степенного ряда.

4.Что называют областью сходимости степенного ряда?

5. При каком условии степенной ряд сходится?

6.Запишите общий вид ряда Тейлора и ряда Маклорена.

Содержание практической работы

Разложите функцию в степенной ряд Маклорена

1*) f(x) = sinx   2)f(x)=*$2x^5+3x^4+4x^3+8x^2+6x+3$

Раздел 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Тема 11.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия

Практическая работа №25.

Общее и частное решения дифференциальных уравнений

Цели:

1) знать определение дифференциальных уравнений, алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

2) уметь решать прикладные задачи дифференциальные уравнения.

Теоретические сведения

Пример 1. Найти уравнение кривой, обладающей свойством, что угловой коэффициент касательной в ее любой точке равен удвоенной абсциссе.

.tgα = 2x. Как известно, коэффициент прямой равен производной функции. $\frac{dy}{dx}$ = 2x; dy = 2x·dx.

Найдем уравнение этой кривой. Для этого выполним интегрирование. $\int dy=\int 2xdx$; y = 2·$\frac{x^2}{2}$ +C;

y = x^2+C.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию yи ее производные или дифференциалы**.** Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит только от одного независимого переменного.Общий вид дифференциального уравнения: F(x,y,y′,″y‴,…$y^{(n)}$) = 0.Максимальный порядок входящих в уравнение производных называется порядком дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция, которое обращает это уравнение в тождество.Общим решением дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида: $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$. Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$; а затем проинтегрировать обе части полученного равенства: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение cosx-y′ = 0.

Запишем его в виде: $y' = cosx$; $\frac{dy}{dx} = cosx$; $dy = cosxdx$;

$\int dy = \int cosxdx$; $y = sinx + C$.

Пример 3

Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$;решение: $y^2dy = xdx$;

$\int y^2dy = \int xdx$. $\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C$.

Содержание практической работы

Найдите общее решение дифференциального уравнения:

1) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$; 2) $\sqrt{x}dy = \sqrt{y}dx$; 3) $(1+y)dx - \sqrt{x}\cdot dy = 0$;

4) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2} = 0$; 5) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; 6) $y^2dx = x^3dy$

Тема 11.2 Уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах

Практическая работа №26.

Решение уравнений первого порядка

Цели:

1) знать определение однородного дифференциального уравнения, алгоритм решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка

2) уметь решать однородные дифференциальные уравнения

Теоретические сведения

Дифференциальные уравнения позволяют решить многие прикладные задачи.

Пример 1

При планировании товарных запасов в днях целесообразно использовать уравнение ydy=(b+$\frac{a}{x}$)dx, где y- однодневный оборот квартала; x – запасы в днях;a иb –параметры уравнения; a=20; b=40. Найти решение данного уравнения.

Решение. $\int ydy = \int (b + \frac{a}{x})$ dx;

$\frac{y^2}{2} = 40x + 20\cdot ln|x| + C$

Многие дифференциальные уравнения, не являясь уравнениями с разделяющимися переменными, приводятся к ним с помощью замены переменных. К таким уравнениям относятся однородные уравнения, общий вид которых $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$. (*)

При решении таких уравнений делается замена переменной y по формуле $y=u(x)$, где u– новая переменная. Тогда

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$, а $u = \frac{y}{x}$. Подставляя эти выражения в уравнение (*) получим $\frac{du}{dx}x + u = f(u)$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные получаем $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$. Интегрирование дает Ф(u) – ln|x| = C, где Ф(u) – одна из первообразных функций функции . заменяяu=$\frac{y}{x}$ получаем

$Ф(\frac{y}{x})$-$ln|x|$ = C. Множество решений, даваемых этой формулой. Должно быть дополнено решениями вида $u = u_o$, если $f(u_o)-u_o = 0$, или
$y = u_o x$.
Пример 2
Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}$ =
Решение
Разделим и числитель и знаменатель на x^2:
$\frac{dy}{dx}$ = = u, получим $\frac{du}{dx}$x + u = или
$\frac{du}{dx}x+u=$, или$\frac{du}{dx}x = -u$; $\frac{du}{dx}x=\frac{u-u^2}{1+u^2}$
$Ln|\frac{u}{u^2-1}| - ln|x|=lnC$; $y = (y^2-x^2)C$
Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $\frac{dy}{dx}$ $=f(x)y + q(x)$, где функции $f(x)$и$q(x)$ непрерывны на интервале (a,b). Если $q(x)=0$, то $\frac{dy}{dx}= f(x)y$. Решение последнего уравнения может быть в виде:$y = Ce^{F(x)}$, где$F(x)$ – первообразная функция по отношению к$f(x)$. Это же уравнение можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.
Пример 2
Найти общее решение уравнения $\frac{dy}{dx}$ - = $(x+1)^2$
Решение
Это линейное уравнение: здесь f(x) = -q(x) = $-(x+1)^2$
Положим y = uz и продифференцируем это равенство по x:
$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}$; подставим теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$в данное уравнение, получим $u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} -$ $= (x+1)^2$
Или $u\frac{dz}{dx} + z(\frac{du}{dx}$ - $) = (x+1)^2$ (*)
так как одну из вспомогательных функций uили z можно выбрать произвольно, то в качестве возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx}$ - = 0. Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем $\frac{du}{u}$ - = 0; $\int\frac{du}{u} = \int\frac{dx}{x+1}$;$ln|u| = 2\ ln|x+1|$;
$u = (x+1)^2$ Подставим теперь выражение для u в уравнение (*); тогда получим уравнение $(x+1)^2\frac{dz}{dx} = (x+1)^3$; $\frac{dz}{dx}$ = x+1
отсюда находим $\int dz = \int(x+1)dx$;

$z = \frac{(x+1)^2}{2} + C$
Получаем общее решение
.$y = uz = (x+1)^2[\frac{(x+1)^2}{2} + C]$
$Y = \frac{(x+1)^4}{2} + C\ (x+1)^2$

Содержание практической работы

Найти общее решение дифференциальных уравнений
1) $\frac{dy}{dx}$ + = ; 2) $\frac{dy}{dx}$ - = ; 3) $\frac{dy}{dx}$ + =
4) $(y-xy)dx + (x+xy)dy = 0$; 5)$(xy-y)dx-(x-xy)dy = 0$
6)$(y+x^2y)dx - (xy^2 - x)dy = 0$

Тема 11.3 Уравнения высших порядков

Практическая работа №27.

Решение уравнений высших порядков

Практическая работа

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по решению дифференциальных уравнений высших порядков. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Теоретические сведения

Дифференциальное уравнение n-го порядка, имеющее вид $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n-кратным интегрированием. При каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная, а в окончательном результате – n произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее искомой функции, т.е. уравнение вида $F(X, y', y'') = 0$ с помощью подстановки $y' = p(x)$ (откуда $y'' = \frac{dp}{dx}$) преобразуется в уравнению первого порядка $F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной т. е. уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$ с помощью подстановки $y' = p(x)$ (откуда $y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$) сводится к уравнению первого порядка $F\left(y, p, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$

› Контрольные вопросы:

1. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Опишите область определения использованных в записи уравнения переменных и условия на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
2. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. Опишите область определения использованных в записи уравнения переменных и условия на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
3. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка в нормальной форме. Опишите область определения использованных в записи уравнения переменных и условия на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
4. Запишите общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной форме. Опишите область определения использованных в записи уравнения переменных и условия на гладкость всех, использованных в записи уравнения функций.
5. Дайте определение решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Опишите область определения решения и условия на гладкость решения.

Содержание практической работы

Вариант 1.

1. Найти частные интегралы дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.
   a. $y'' = \sin 3x; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{9}$
   b. $\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-2x}; y(0) = \frac{7}{8}; y'(0) = \frac{1}{4}; y''(0) = \frac{1}{2}$
   c. $xy'' = 1; y(1) = 0, y'(1) = 2$
   d. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos^2 x; y(0) = \frac{7}{8}; y'(0) = \frac{1}{4}; y''(0) = 1$
2. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 3x^2 - 4x^3$ выделить кривую, проходящую через точку (0, 1) и касающуюся в ней прямой $x + y - 7 = 0$

3. Ускорения прямолинейного движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается формулой $a(t)=5t^2-3t$ Найти закон движения точки, если в начальный момент времени t = 0, скорость v=0,5 м/с, а путь s=0.
4. Телль движется прямолинейно с ускорением $a(t)=12t^2-4$ (м/с^2). Найти путь, пройденный телом за первые три секунды, если t = 0, скорость v=0,а s=0.
5. В некоторый момент времени движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью 25 м/с был включен тормоз. Найти время и расстояние, пройденное поездом после включения тормоза, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,3 веса поезда.

Вариант 2.

1. Найти общие интегралы.
   a. $y''=\sin 2x$
   b. $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}=5\varphi^4-2\varphi^3+\varphi^2$
   c. $y''=\ln x$
   d. $xy''-y'=0$
   e. $x^2y''+xy'=1$
2. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка $2yy'^3+y''=0$, удовлетворяющее начальным условиям y(0)=0,y’(0)=-3
3. В некоторый момент времени движения поезда по горизонтальному участку пути со скоростью 25 м/с был включен тормоз. Найти время и расстояние, пройденное поездом после включения тормоза, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,3 веса поезда.
4. Из семейства интегральных кривых уравнения $y''=3x^2-4x^3$ выделить кривую, проходящую через точку (0, 1) и касающуюся в ней прямой $x+y-7=0$
5. Ускорения прямолинейного движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается формулой $a(t)=5t^2-3t$ Найти закон движения точки, если в начальный момент времени t = 0, скорость v=0,5 м/с, а путь s=0.

Тема 11.4 Линейные уравнения высших порядков

Практическая работа №28.

Решение линейных уравнений высших порядков

Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет следующий вид:

$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_ny=0 \quad (a_0\neq 0)$

Пример 1

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'''-y'=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(2)=1, y'(2)=0, y''(2)=-1$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=1$ – три различных действительных корня, поэтому общее решение: $y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^x$, где $C_1,C_2,C_3-const$

Находим **первую производную** $y'(x)=(C_1+C_2e^{-x}+C_3e^x)'=-C_2e^{-x}+C_3e^x$ и применяем начальное условие $y'(2)=0$: $y'(2)=-C_2e^{-2}+C_3e^2=0$

$y''(x)=(-C_2e^{-x}+C_3e^x)'=C_2e^{-x}+C_3e^x \quad y''(2)=-1 \; y''(2)=C_2e^{-2}+C_3e^2=-1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2e^{-2} + C_3e^2 = 1 \\ -C_2e^{-2} + C_3e^2 = 0 \\ C_2e^{-2} + C_3e^2 = -1 \end{cases}$$

Сложить почленно 2-е и 3-е уравнения, в результате чего получаем: $2C_3e^2 = -1 \;\Rightarrow\; C_3 = -\frac{1}{2e^2} = -\frac{1}{2}e^{-2}$ – подставим по 2-е уравнение и выразим C_2: $-C_2e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\cdot e^2 = 0$

Почти всё готово. Подставим $C_2 = -\frac{1}{2}e^2$ и $C_3 = -\frac{1}{2}e^{-2}$ в 1-е уравнение системы: $C_1 - \frac{1}{2}e^2\cdot e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2}\cdot e^2 = 1$

$C_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \;\Rightarrow\; C_1 = 2$

Содержание практической работы

Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' + y'' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$

Перечень рекомендуемой литературы
(в том числе Интернет-ресурсы)

Основные источники:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А., Сабурова Т.Н. Элементы высшей математики / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 400 с.

2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике / В.П. Григорьев. – М.: Академия. – 2017. – 157 с.

Дополнительные источники:

2. Богомолов Н.В. - Практические занятия по математике. – М.: ЮРАЙТ, 2017.

Интернет-ресурсы:

6. Материалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/collection/matematika

7. Московский центр непрерывного математического образования http://www.mccme.ru

8. Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет-школа http://www.bymath.net

9. Газета «Математика» Издательского дома «Первое сентября» http://mat.1september.ru

10. Задачи по геометрии: информационно-поисковая система http://zadachi.mccme.ru

6. Интернет-проект «Задачи» http://www.problems.ru

7. Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online) http://www.mathtest.ru